

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Voit käyttää laskinta (tai Matlabia) ja kurssin materiaalia. Koetehtävät on kuitenkin ratkottava itsenäisesti ja perustellen. Kerro mitä lähteitä käytit ratkaisuissasi.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteuttaa jokaisen tehtävän asteikolla 0...3. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

Hyödyllinen tieto: Fourier-integraalimuunnokselle pätee $\widehat{\hat{s}} = s$, kun $s(t) = e^{-\pi t^2}$.

1. Signaaleille r ja s pätee $r(t)^* = r(t)$ ja $s(t) = r(t) + r(-t)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Näytä laskemalla, että $\widehat{\hat{s}}(\nu)^* = \widehat{\hat{s}}(\nu)$ ja $\widehat{\hat{s}}(-\nu) = \widehat{\hat{s}}(\nu)$ kaikilla $\nu \in \mathbb{R}$.
2. Laske $s * s$, kun $s(t) = e^{-\pi t^2}$, missä $t \in \mathbb{R}$. (Vihje: $\widehat{\hat{s}} = s$, kun $s(t) = e^{-\pi t^2}$.)
3. Laske $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix^3} e^{-x^6} x^2 dx$. (Vihje: $\widehat{\hat{s}} = s$, kun $s(t) = e^{-\pi t^2}$. Ja $\pi t^2 = x^6 \dots$)
4. Oletetaan, että $\int_0^1 |s(t)|^2 dt < \infty$. Miksi silloin myös $\int_0^1 |s(t)| dt < \infty$?
5. Olkoot $q(t) = i^t s(t)$ ja $r(t) = (-1)^t s(t)$ niin, että pätee

$$\sum_{t \in \mathbb{Z}} |s(t)| < \infty, \quad \sum_{t \in \mathbb{Z}} s(t) = 9, \quad \sum_{t \in \mathbb{Z}} r(t) = 8, \quad \sum_{t \in \mathbb{Z}} q(t) = 7.$$

Mitä voidaan tämän tiedon perusteella päätellä signaalin $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ diskreetin ajan Fourier-muunnoksen arvoista $\widehat{\hat{s}}(\nu) \in \mathbb{C}$ eri taajuuksilla ν ?

6. Todista suoraan laskemalla, että $(1-x) \sum_{k=0}^{99} x^k = 1 - x^{100}$, kun $x \in \mathbb{C}$.
7. Millä arvoilla $a \in \mathbb{R}$ pätee $0 = \int_0^1 e^{-ita} dt$?
8. Millä arvoilla $b \in \mathbb{R}$ pätee $0 = \sum_{t=1}^{100} e^{-itb}$?
9. Ville viheltää taajuudella 2000 Hz. Miksi 4000 näytettä sekunnissa ei riitä tallentamaan tätä ääntä? Havainnollista selitystä myös piirtämällä kuva ääniaallosta ja näytteistä.
10. Kuvaile muutamilla lauseilla mitä ovat DFT ja FFT. Miksi ne ovat tärkeitä? (Ei tarvitse esitellä kaavoja, vaan yleisluonteinen selitys riittää. Tässä vihjeeksi mahdollisia avainsanoja: *signaali, analoginen, näytteenotto, digitaalinen, nopea laskenta, "hajoita-ja-hallitse", sovellukset käytännössä.*)