

Kurssitentti ja yleinen tentti 27.10.2021 klo 16:30–20:30.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.

Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.

Kaikki periodin I/2021 luentokurssille osallistuneet voivat halutessaan laskea kuusi tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”.

1. a) Määritä sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^{k+1}}{5^{k-1}}$$

summa. (3p)

- b) Millä muuttujan x arvoilla sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{7^k} x^k$$

suppenee? (3p)

2. a) Määritä funktion $f(x) = x^2 \sin(3x)$ Maclaurin-polynomi $P_5(x)$.
(Maclaurin-polynomi = Taylor-polynomi, kun $x_0 = 0$). (2p)

- b) Osoita (esimerkiksi L'Hospitalin säännön avulla), ettei raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1 + x^2}{\ln(1 + 2ax)}$$

riipu parametrin $a \neq 0$ arvosta. (4p)

3. a) Laske funktion $\tan x$ derivaatta (olettaen funktioiden \sin ja \cos derivaatat tunnetuiksi). (3p)

- b) Johda funktion $f(x) = \arctan x$ derivaatan lauseke. (3p)

4. Laske epäoleellinen integraali

$$\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$$

sijoittamalla aluksi $x = t^2$. (6p)

5. a) Pyramidihuijarin keräämien sijoitusten arvo $y = y(t)$ ajan t funktiona toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$y' = ky, \quad k > 0 \text{ vakio,}$$

ja alkuehdon $y(0) = 100$ euroa. Viranomaisten puuttuessa huijaukseen hetkellä $t = 2$ vuotta tilin saldo on $y(2) = 10^8$ euroa. Määritä näiden tietojen perusteella kerroin k . Vastaukseksi riittää tarkka arvo. (3p)

b) Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = 1 - y$ alkuehdolla $y(0) = 3$. (3p)

6. Olkoon p ja q sellaisia vakioita, joilla funktiot $y_1(x) = e^{2x}$ ja $y_2(x) = e^{-x}$ ovat differentiaaliyhtälön

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$$

ratkaisuja. Etsi tällöin differentiaaliyhtälön

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = x$$

yleisen ratkaisun lauseke. (6p)