

MS-A0101 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (TFM)

Kurssitentti ja yleinen tentti 27.10.2021 klo 16.30–20.30.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.

Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.

Jokainen kurssille I/2021 osallistunut voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”.

1. a) Lukujonon (b_n) termeille on voimassa

$$\frac{3^{2n+1}}{9^n + 1} \leq b_n \leq \frac{9n^2 + 5n}{3n^2 + 1}$$

kaikilla $n \geq 1$. Suppeneeko jono (b_n) ?

Huom: Oletetaan tunnetuksi, että yläraja on suurempi kuin alaraja kaikilla $n \geq 1$; tätä ei tarvitse perustella erikseen.

- b) Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin(\pi \sin x)}{2x - \pi}$$

esimerkiksi L'Hospitalin säännön avulla.

2. a) Määritä (geometrisen?) sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{4^{k+5}}$$

summa.

- b) Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5^k}?$$

- c) Olkoon $s_k = 1 + 2 + 3 + \dots + k$, kun $k \in \mathbf{N}$. Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s_k}?$$

3. a) Perustele: Yhtälö

$$f(y) = 2y + \sin y = x$$

määrää yksikäsitteisellä tavalla y :n muuttujan x funktiona, eli muodossa $y = g(x)$.

- b) Laske a-kohdan funktion $g(x)$ derivaatta $g'(2\pi)$.

4. Laske epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 (\ln x)^2 dx$$

esimerkiksi osittaisintegroinnin avulla.

Vihje: Toinen funktio on vakio 1, t.s. $(\ln x)^2 = 1 \cdot (\ln x)^2$. Harjoitustehtävän 4b/5A aputulosta voi käyttää ilman perusteluja.

5. a) Eräs henkilö on opetellut ulkoa 10 000 ensimmäistä desimaalia luvusta π . Hetkellä $t = 0$ (kuukautta) kiinnostus aiheeseen lopahtaa, jolloin muistissa olevien desimaalien lukumäärä $y = y(t)$ alkaa vähentyä differentiaaliyhtälön $y' = -ky$ mukaisesti. Määritä vakion k tarkka arvo, kun $y(0) = 10\,000$ ja $y(12) = 2\,500$.

b) Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = -y^2$ alkuehdolla $y(0) = 10$.

6. a) Määritä differentiaaliyhtälön

$$y'' - 8y' + 12y = 36x + 24$$

yleinen ratkaisu.

b) Erään lineaarisen ja homogeenisen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön perusratkaisut ovat $y_1(x) = x$ ja $y_2(x) = \cos x$. Määritä alkuarvot tehtävän $y(0) = 100$, $y'(0) = 200$ ratkaisu.

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

Huom. 2: Kurssitentti voi uusia II-periodin tentin yhteydessä, jolloin laskaripisteet ovat vielä voimassa. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**