

MS-A0305 Differentiaali- ja integraalilaskenta 3

Kurssitentti ja yleinen tentti 28.10.2021 klo 9.00–13.00.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.

Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.

Jokainen kurssille I/2021 osallistunut voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”.

1. Origokeskisen 2-säteisen pallon B ytimen $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ lämpötila $T(x, y, z)$ on 100 astetta, ja sen ulkokuoren $1 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ lämpötila on 0 astetta. Määritä pallon keskilämpötila

$$\bar{T} = \frac{1}{V} \iiint_B T(x, y, z) dV.$$

2. a) Laske vektorikentän $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z \mathbf{i} - 2x \mathbf{j} + \mathbf{k}$ viivaintegraali pisteestä $(0, 0, 0)$ pisteeseen $(1, 2, 3)$
(i) pisteiden välistä janaa C_1 pitkin.
(ii) pitkin käyrää C_2 , jolla on parametrisointi $x = t, y = 2t^2, z = 3t^3, 0 \leq t \leq 1$.
b) Onko vektorikentällä \mathbf{F} potentiaalia?

3. Laske viivaintegraali

$$\oint_{\partial D} xy dx + y^2 dy$$

esimerkiksi Greenin kaavan avulla, kun D on kahden puoliympyrän väliin jäävä tasoalue

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16, y \geq 0\}.$$

4. Tarkastellaan vektorikenttää

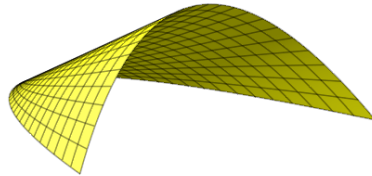
$$\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} - z \mathbf{k}.$$

- a) Osoita, että vektorikentän \mathbf{F} lähteisyys (eli divergenssi) $\nabla \cdot \mathbf{F}$ ja pyörteisyys (eli roottori) $\nabla \times \mathbf{F}$ ovat molemmat nollija.
b) Edellisen kohdan perusteella vektorikentällä \mathbf{F} on sekä skalaari- että vektoripotentiaali. Määritä molemmat potentiaalit.

5. Huhujen mukaan Maarinlahden luonnonsuojelualueelle on rakenteilla laavu, jonka katon muotoa kuvaa parametrisointi $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$,

$$\begin{cases} x = u^2 \\ y = v^2 \\ z = u^2 - v, \end{cases}$$

kun $0 \leq u \leq 1$, $-u \leq v \leq u$.



- a) Piirrä kuvio katon parametrialueesta uv -tasossa. (1 p.)
b) Määritä katon normaalivektori ja pinta-alan paikallinen suurennussuhde parametrien arvoja $u = 1/2$ ja $v = 1/4$ vastaavassa pisteessä. (3 p.)
c) Laske laavun katon pinta-ala. (2 p. saa lausekkeesta, joka on kirjoitettu kaksinkertaisena integraalina; tarkan tai likiarvon saa sopivalla ohjelmalla, mutta sitä ei vaadita.)
6. Laske vektorikentän

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$$

vuon ulospäin pallon

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

reunan läpi. Voit käyttää joko Gaussin lausetta tai pintaintegraalia; jälkimmäisessä vaihtoehdossa yhden muuttujan integraalit lienee syytä laskea ohjelmistolla.

Huom. 1: Kurssille osallistuneet saavat palautekyselyyn vastaamisesta yhden koepisteen!

Huom. 2: Kurssitentint voi uusia seuraavan tentin yhteydessä. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**