ELEC-A3110 Mekaniikka, syksy 20 **Välikoe 3, osa B, malliratkaisu**
opettaja: Matti Raasakka

Tehtävä B1

Ohut tasapaksu köysi (pituus l, massa m_k) roikkuu suorana jumppasalin katosta. Vapaasti levossa roikkuessaan köyden alapää on korkeudella h_0 jumppasalin lattiasta. Lapsi (massa m_l) juoksee vaakasuuntaisella nopeudella v_0, ja tarttuu köyteen kiinni. Lasta voidaan mallintaa pistemassana, joka tarttuu köyden alapäähän kiinni. Lapsi-köysisysteemiä voidaan tarkastella fysikaalisena heilurina, joka kääntyy kitkatta kiinnityspisteensä ympäri, ja johon vaikuttaa putoamiskiihtyvyys g. Oletetaan, että köysi pysyy kaiken aikaa täysin suorana.

Johda lauseke köyden alapään korkeuden maksimiarvolle, kun tartuttuaan köyteen lapsi heilahtaa vapaasti köyden varassa.

Malliratkaisu

Kulmaliikemäärä säilyy köyden kiinnityspisteen suhteen lapsen tarttuessa köyteen, sillä ulkoisten voimien aiheuttama kokonaisvoiman momentti häviää. (1p) Kulmaliikemääräksi juuri ennen kuin lapsi tarttuu köyteen saadaan lapsen kulmaliikemäärä $L_1 = m_l v_0 l$, kun lasta mallinnetaan pistemassana. (0,5p) Tarttumisen jälkeen kulmaliikemäärä saadaan lapsi-köysisysteemin kulmaliikemääränä $L_2 = I\omega$, missä $I = I_k + I_l$ on systeemin hitausmomentti ja ω kulmaliikemäärä köyden kiinnityspisteen suhteen juuri tarttumisen jälkeen. (0,5p) Lapsen hitausmomentti $I_l = m_l l^2$. (0,5p) Köyttä voidaan käsitellä ohuena sauvana, joten sen hitausmomentiksi saadaan $I_k = \frac{1}{3} m_k l^2$. (0,5p) Näin ollen kulmaliikemäärän säilymisestä saadaan

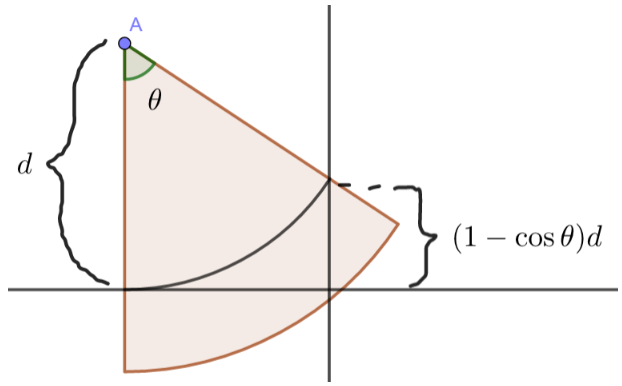
$$\begin{aligned} L_1 &= L_2 \\ m_l v_0 l &= I\omega \\ \omega &= \frac{m_l v_0 l}{I} = \frac{m_l v_0 l}{(m_l + \frac{1}{3} m_k) l^2} = \frac{v_0/l}{1 + \frac{m_k}{3m_l}} \,. \qquad \text{(1p)} \end{aligned}$$

Heilahduksen aikana systeemin mekaaninen kokonaisenergia säilyy, sillä systeemiin ei vaikuta epäkonservatiivisia voimia. (1p) Juuri tarttumisen jälkeen lapsi-köysisysteemin liike-energia on

$$K_2 = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} L_2 \omega = \frac{1}{2} m_l v_0 l \frac{v_0/l}{1 + \frac{m_k}{3m_l}} = \frac{1}{2(1 + \frac{m_k}{3m_l})} m_l v_0^2 \,. \qquad \text{(1p)}$$

Heilahduksen aikana liike-energia muuttuu painovoiman potentiaalienergiaksi. Kun heilahduksen korkein kohta saavutetaan, kaikki liike-energia on muuttunut painovoiman potentiaalienergiaksi. (1p) Merkitään köyden muodostamaa kulmaa pystysuoraan nähden symbolilla θ. Etäisyydellä d köyden kiinnityspisteestä olevan köyden pisteen korkeuden muutokselle köyden ala-asennosta ($\theta = 0$) kulmaan θ voidaan johtaa kaava $\Delta h = d(1 - \cos\theta)$ (kts. kuva 1). Köyden painopiste on etäisyydellä $l/2$ köyden kiinnityspisteestä, joten painovoiman potentiaalienergian muutokselle köyden ala-asennosta kulmaan θ saadaan siten

$$\begin{aligned} \Delta U_{\text{grav}}(\theta) &= m_k g \Delta h_k + m_l g \Delta h_l \\ &= m_k g \frac{l}{2}(1 - \cos\theta) + m_l g l (1 - \cos\theta) \\ &= \left(1 + \frac{m_k}{2m_l}\right) m_l g l (1 - \cos\theta) \,. \end{aligned}$$



Kuva 1: Korkeuden muutos heilahduskulman funktiona.

Mekaanisen kokonaisenergian säilymisestä saadaan siis heilahduksen maksimikulmalle $\theta_{\max}$ yhtälö

$$
\begin{aligned}
K_2 &= \Delta U_{\text{grav}}(\theta_{\max}) \\
\frac{1}{2(1+\frac{m_k}{3m_l})} m_l v_0^2 &= \left(1 + \frac{m_k}{2m_l}\right) m_l g l (1-\cos\theta_{\max}) \\
l(1-\cos\theta_{\max}) &= \frac{v_0^2/g}{2\left(1+\frac{m_k}{3m_l}\right)\left(1+\frac{m_k}{2m_l}\right)} \, .
\end{aligned}
$$

Köyden alapään maksimikorkeudeksi saadaan siis

$$
h_{\max} = h_0 + l(1-\cos\theta_{\max}) = h_0 + l\frac{v_0^2/g}{2\left(1+\frac{m_k}{3m_l}\right)\left(1+\frac{m_k}{2m_l}\right)} \, . \qquad \text{(1p)}
$$