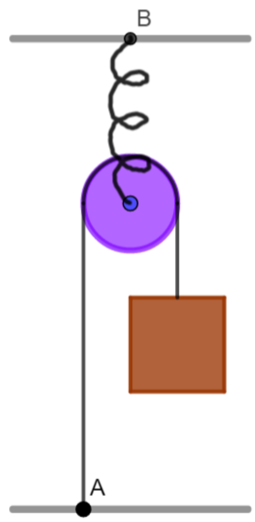
**ELEC-A3110 Mekaniikka, syksy 21** **Välikoe 3, osa B, malliratkaisut**

opettaja: Matti Raasakka

## Tehtävä B1




Kiinteän sylinterin muotoinen väkipyörä (massa $m$, säde $R$, kuvassa violetilla) on kiinnitetty kattoon (piste B) jousen avulla, jonka jousivakio on $k$. Väkipyörä pyörii kitkatta keskipisteensä läpi kulkevan akselin ympäri, johon jousi on kiinnitetty. Väkipyörän ympäri kulkee venymätön kevyt naru, jonka toinen pää on kiinnitetty paikoilleen lattiaan (piste A), ja toiseen päähän on kiinnitetty roikkumaan laatikko (kuvassa ruskealla), jolla on sama massa $m$ kuin väkipyörällä. Väkipyörä pyörii narun ympäri lipsumatta. Sekä väkipyörään että laatikkoon vaikuttaa putoamiskiihtyvyys $g$.

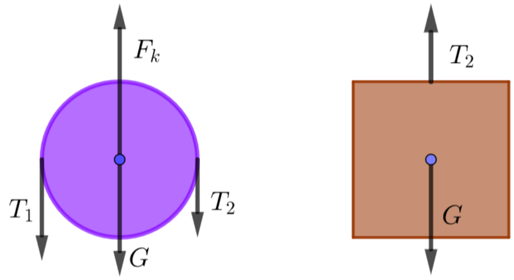
a) Kuinka paljon jousi venyy lepopituudestaan (kohdasta, jossa jousivoima = 0) koko systeemin ollessa levossa?

b) Systeemi saatetaan pystysuuntaiseen värähtelyliikkeeseen poikkeuttamalla se tasapainoasemastaan. Selvitä värähtelyn jaksonaika.

SV: En trissa, som är formad som en kompakt cylinder (massa $m$, radie $R$, lila i bilden), är upphängd i taket (punkt B) med hjälp av en fjäder vars fjäderkonstant är $k$. Trissan roterar friktionslöst runt axeln som går genom dess mittpunkt, i vilken fjädern är fäst. Runt trissan går det ett lätt och otöjbart snöre, vars ena ända är fäst i golvet och i andra ändan har man hängt upp en kropp (brun i bilden), som har samma massa $m$ som trissan. Trissan snurrar runt snöret utan att glida. Både trissan och andra kroppen påverkas av tyngdaccelerationen $g$.

a) Hur mycket töjs fjädern från sin vilolängd (punkten där fjäderkraften = 0) när hela systemet är i vila?

b) Systemet sätts i lodrät svängningsrörelse genom att avvika det från sitt jämviktsläge. Ta reda på svängningens period.




**Malliratkaisu**

Väkipyörään vaikuttaa ylöspäin jousivoima $F_k$ ja alaspäin painovoima $G = mg$ sekä narun aiheuttamat voimat $T_1$ väkipyörän vasempaan reunaan ja $T_2$ väkipyörän oikeaan reunaan. Laatikkoon vaikuttaa painovoima $G$ alaspäin ja köyden tukivoima $T_2$ ylöspäin. (1p) Valitaan positiiviset liikesuunnat kappaleille alaspäin, ja väkipyörän positiivinen pyörähdyssuunta myötäpäivään. Väkipyörän massakeskipisteen kiihtyvyydelle $a_v$ saadaan liikeyhtälö

$$ma_v = T_1 + T_2 + G - F_k\,. \quad \text{(1p)}$$

Väkipyörän pyörimisliikkeen kulmakiihtyvyydelle $\alpha_v$ saadaan liikeyhtälö

$$I_v \alpha_v = RT_2 - RT_1\,, \quad \text{(1p)}$$

missä $I_v = \frac{1}{2}mR^2$ on väkipyörän hitausmomentti. Laatikon massakeskipisteen kiihtyvyydelle $a_l$ saadaan liikeyhtälö

$$ma_l = G - T_2\,. \quad \text{(1p)}$$

a) Kun systeemi on levossa, niin kaikki kiihtyvyydet ja kulmakiihtyvyydet häviävät. Laatikon tasapainoehdoksi saadaan $T_2 = G$. Väkipyörän pyörimisliikkeen tasapainoehdoksi saadaan $T_1 = T_2$, joten myös $T_1 = G$. (1p) Sijoittamalla väkipyörän massakeskipisteen tasapainoehtoon saadaan $F_k = 3G$. Jousen poikkeamalle $x_0$ lepopituudestaan saadaan siis

$$kx_0 = 3mg \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{3mg}{k}\,. \quad \text{(1p)}$$

b) Koska naru pyörii liukumatta väkipyörän ympäri, niin väkipyörän massakeskipisteen kiihtyvyys liittyy sen kulmakiihtyvyyteen kaavan $a_v = R\alpha_v$ kautta. Jos väkipyörä olisi paikoillaan, niin laatikon kiihtyvyys olisi $R\alpha_v$, mutta nyt väkipyöräkin liikkuu, joten laatikon kiihtyvyydeksi saadaan $a_l = a_v + R\alpha_v = 2a_v$. (1p) Laatikon massakeskipisteen liikeyhtälöstä saadaan

$$2ma_v = G - T_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = G - 2ma_v\,.$$

Sijoitettamalla väkipyörän pyörimisliikkeen liikeyhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} I_v \frac{a_v}{R} &= R(G - 2ma_v) - RT_1 \\ \frac{1}{2}mRa_v &= R(G - 2ma_v - T_1) \\ T_1 &= G - \frac{5}{2}ma_v\,. \end{aligned}$$

Sijoittamalla vielä väkipyörän massakeskipisteen liikeyhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} ma_v &= (G - \frac{5}{2}ma_v) + (G - 2ma_v) + G - F_k \\ \frac{11}{2}ma_v &= 3G - F_k \\ ma_v &= \frac{6}{11}G - \frac{2}{11}F_k = -\frac{2}{11}k(x - x_0)\,. \end{aligned}$$

Tämä on harmonisen värähtelijän liikeyhtälö, joka värähtelee tasapainopisteensä $x_0 = \frac{3mg}{k}$ suhteen kuin se olisi kiinnitetty jouseen, jonka jousivakio on $k' = \frac{2}{11}k$. Tällöin systeemi värähtelee kulmataajuudella $\omega = \sqrt{k'/m} = \sqrt{2k/11m}$. Värähtelyn jaksonaika on

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{11m}{2k}}\,. \quad \text{(1p)}$$

## Tehtävä B2

Astronautti seisoo tuntemattoman planeetan (säde $R$) pinnalla kädessään mittalasillinen nestettä. Nesteen massa on $m$ ja tilavuus $V$. Nesteen pinnalla vallitsee paine $p_0$ ja syvyydessä $d$ paine $p$. Selvitä planeetan massa annettujen tietojen perusteella.

SV: En astronaut står på ytan av en okänd planet (radie $R$). I sin hand håller astronauten ett mätglas fyllt med vätska. Vätskans massa är $m$ och volym $V$. Trycket vid vätskans yta är $p_0$ och på djupet $d$ är trycket $p$. Ta reda på planetens massa baserat på de angivna uppgifterna.

### Malliratkaisu

Paineen syvyysriippuvuuden kaava on $p = p_0 + \rho g d$, missä $p_0$ on paine nesteen pinnalla, $\rho$ nesteen tiheys, $g$ putoamiskiihtyvyys, ja $d$ etäisyys nesteen pinnalta. (1p) Tiheys voidaan ilmaista tilavuuden $V$ ja massan $m$ avulla $\rho = m/V$. (1p) Putoamiskiihtyvyydelle voidaan ratkaista $g = \frac{p-p_0}{md/V}$. (2p)

Toisaalta putoamiskiihtyvyydelle saadaan Newtonin painovoimalaista

$$mg = F_g = G\frac{mM}{R^2} \quad \Rightarrow \quad g = G\frac{M}{R^2}\,,$$

missä $G$ on Newtonin painovoimavakio, $M$ planeetan massa, ja $R$ planeetan säde. (1p) Asettamalla kaksi putoamiskiihtyvyyden lauseketta yhtä suuriksi saadaan

$$\frac{p-p_0}{md/V} = G\frac{M}{R^2}\,. \qquad \text{(1p)}$$

Tästä voidaan ratkaista planeetan massalle

$$M = \frac{p-p_0}{Gmd}VR^2\,. \qquad \text{(2p)}$$