Todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen peruskurssi
MS-A0501, MS-A0502, MS-A0503, MS-A0504 — Tentti
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos — 13.12.2021
Aalto-yliopisto — Emilia Blåsten

Ohje: Vastaa suomeksi tai englanniksi ja ratko tehtävät konsultoimatta muita. Vastaa lyhyesti ja ytimekkäästi, mutta perustele ratkaisusi. Pelkkä lukuarvo vastauksena ei anna pisteitä. Kokeessa on 4 tehtävää, jokaisesta saa 0–6 pistettä. Kokeessa saa käyttää ennalta valmistettua A4-kokoista yksipuolista muistilappua, kurssin aikana käytettyjä ja tuotettuja materiaaleja, MAOL:in tai vastaavan taulukoita sekä funktiolaskinta tai Matlab/GNU Octave/R kunhan sitä käyttää laskimena – ei tilastollisen analyysin ohjelmistona.

Instructions: The English exam starts on page 4. Answer in Finnish or English and solve the problems without consulting others. Answer briefly but explain your solution. A single number as an answer will not give you points. There are 4 exercises, each worth 0–6 points. You may use a "cheat sheet" the size of a single sided A4 paper, the MAOL or corresponding tables, any material used or prepared during the course and a scientific calculator or Matlab/GNU Octave/R as long as you use it as a calculator – not as a statistical analysis software.

Normaalitaulukko sivulla 3. — A standard normal table is on page 3.

T1 Eräässä roolipelissä soturi lyö örkkiä. 20-sivuisella nopalla heitettäessä soturi ei osu (M), jos saadaan 15 tai ali. Tulee tavallinen osuma (H), jos saadaan 16–19 ja tulee kriittinen osuma (C), jos saadaan 20. Huti ei tee vahinkoa örkille. Osumat tekevät vahinkoa (V). Tavallisella osumalla heitetään kahta 4-sivuista noppaa ja vahinko on silmälukujen summa. Kriittisellä heitetäänkin neljä 4-sivuista noppaa ja summataan yhteen. (Tehtävän nopanheitot ovat toisistaan riippumattomia ja tasajakautuneita silmälukuina $1, 2, \ldots, n$, missä n on nopan sivujen määrä.)

(a) Päättele tavallisen osuman H tekemän vahingon V jakauma ja kirjoita se taulukkomuodossa **(2p)**

v	2	3	...
$\mathbb{P}(V = v \mid H)$	?	?	...

(b) Edellisen kohdan perusteella tai muuten, laske, millä todennäköisyydellä tehdään vähintään 6 vahinkoa tavallisella osumalla $\mathbb{P}(V \geq 6 \mid H)$. **(1p)**

(c) Millä tn. krittisellä osumalla tulee vähintään 6 vahinkoa, $\mathbb{P}(V \geq 6 \mid C)$? **(2p)**

(d) Ilman aiempien kohtien oletuksia osumista, millä todennäköisyydellä ensimmäinen lyöntiyritys poistaa pelistä 6 vahinkoa kestävän örkin? **(1p)**

T2 Olkoot X_1 ja X_2 riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{2}{5}$ ja $\mathbb{P}(X_i = 2) = \frac{3}{5}$. Määritellään $U = X_1 + X_2$ ja $V = X_1 \times X_2$. Laske $\mathrm{Cor}(U, V)$. **(6p)**

T3 Olkoot X_i, $i = 1, 2, \ldots, 1000$ toisistaan riippumattomia, joilla $\mathbb{P}(X_i = 0) = 19/20$ ja $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1/20$. Olkoon $S = \sum_{i=1}^{1000} X_i$. Halutaan tuottaa reilun 100-sivuisen nopan avulla lukuja, jotka approksimatiivisesti noudattavat S:n jakaumaa. Olkoon D_{100} tuon nopanheiton tulos.

(a) Blair simuloi standardinormaalijakaumasta lukuja näin: Aluksi nopalla generoidaan luku $(D_{100} - \frac{1}{2})/100 \in (0, 1)$. Sitten normitetun normaalijakauman taulukoista haetaan pienin luku Z_B, jolla $\Phi(Z_B) \geq (D_{100} - \frac{1}{2})/100$. Laske taulukkoa (tai laskinta) käyttäen Z_B, kun

(i) $D_{100} = 100$, **(1p)**

(ii) $D_{100} = 77$. **(1p)**

(b) Laske $\mu_1 = \mathbb{E}(X_1)$ ja $\sigma_1 = \mathrm{SD}(X_1)$ sekä S:n normaaliapproksimaatiota käyttäen arvioi tapahtumien $\{S \geq 67\}$ ja $\{S \geq 55\}$ todennäköisyydet. **(2p)**

(c) Generoi Z_B kuten (a)-kohdassa, ja laske S:lle approksimatiivinen arvo S_A laittamalla sen normaaliapproksimaatio yhtäsuureksi kuin likimain normaali Z_B, kun $D_{100} = 100$ ja $D_{100} = 77$. Mitä yhteistä havaitset (b)-kohdan tapahtumien ja todennäköisyyksien kanssa? **(2p)**

T4 Metsässä hyttyspistoja tulee keskimäärin λ kappaletta sekunnissa. Et tiedä tarkemmin, kuin että $0 \leq \lambda \leq 1$. Saavuttuasi metsään kuluu $x_1 = 5 + N$ sekunttia ensimmäiseen pistoon. N on **opiskelijanumerosi viimeinen numero** (0,1,...,9; jätä mahdolliset kirjaimet huomioimatta). Merkitse N:n arvo vastaukseesi selkeästi ja käytä laskuissa kyseistä numeroarvoa.

(a) Mallinna tuntematonta parametria λ satunnaismuuttujana Λ ja kirjoita sille prioritiheysfunktio $f_\Lambda(\lambda)$, joka sopii tehtävänantoon. **(1p)**

(b) Oletetaan, että väliajat X_i pistosten välillä noudattavat $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ uskottavuusfunktiona $f(x \mid \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$ kun $x \geq 0$ ja $= 0$ muuten. Laske priorin ja havainnon $X_1 = x_1$ perusteella Λ:lle posteriorijakauma normittamisvakiota vaille. **(1p)**

(c) Laske posteriorijakauman maksimikohta (posteriorimoodi). **(2p)**

(d) Tiedetään, että yöllä $\Lambda \geq \frac{1}{6}$ ja päivällä $\Lambda < \frac{1}{6}$. Kumpi on posteriorijakauman perusteella todennäköisempää, että on yö vai päivä? (vihje: $\int \lambda e^{-\lambda a} d\lambda = -\frac{1}{a}\lambda e^{-\lambda a} - \frac{1}{a^2} e^{-\lambda a}$) **(2p)**

Todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen peruskurssi
MS-A0501, MS-A0502, MS-A0503, MS-A0504
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

Tentti
13.12.2021
Emilia Blåsten

Normaalijakauman taulukko // Standard normal table

Allaolevaan taulukkoon on koottu lukuarvoja normitetun normaalijakauman kertymäfunktiolle

$$\Phi(x) = F_Z(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$$

The table below contains values of the standard normal distribution's cumulative distribution function Φ.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

English translations

Ex1 A warrior strikes an orc in a role playing game. The warrior misses (M) if a 20-sided die rolls 15 or less. An ordinary hit (H) occurs if it rolls 16–19. A critical hit (C) occurs on a 20. A miss fails to deal any damage to the orc. Hits do damage (V). An ordinary hit does damage equal to the sum of the rolls of two 4-sided dice. A critical hit does four 4-sided dice worth of damage. (The dice in this exercise are independent from each other and fair with sides having numbers $1, 2, \ldots, n$ where n is the number of faces of that die.)

(a) Deduce the probability distribution of damage V done by an ordinary hit H and write it out in the form of **(2p)**

v	2	3	…
$\mathbb{P}(V = v \mid H)$	?	?	…

(b) Calculate, according to the previous part or otherwise, what is the probability of dealing at least 6 damage on an ordinary hit $\mathbb{P}(V \geq 6 \mid H)$. **(1p)**

(c) What is the probability of dealing at least 6 damage on a critical hit $\mathbb{P}(V \geq 6 \mid C)$? **(2p)**

(d) Without assuming hits or misses, what is the probability that an orc that can take 6 points of damage will be felled by the first attempted strike? **(1p)**

Ex2 Let X_1 and X_2 be independent random variables for which $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{2}{5}$ and $\mathbb{P}(X_i = 2) = \frac{3}{5}$. Define $U = X_1 + X_2$ and $V = X_1 \times X_2$. Calculate $\mathrm{Cor}(U, V)$. **(6p)**

Ex3 Let X_i, $i = 1, 2, \ldots, 1000$ be independent random variables for which $\mathbb{P}(X_i = 0) = 19/20$ and $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1/20$. Let $S = \sum_{i=1}^{1000} X_i$. We want to generate numbers whose distribution is approximately that of S by rolling a fair 100-sided die. Let D_{100} be the number rolled by that die.

(a) Blair generates numbers from the standard normal distribution as follows: First, use the die to generate the number $(D_{100} - \frac{1}{2})/100 \in (0, 1)$. Then, find the smallest number Z_B from the standard normal table for which $\Phi(Z_B) \geq (D_{100} - \frac{1}{2})/100$. Using the table (or a calculator), determine Z_B when

  (i) $D_{100} = 100$, **(1p)**

  (ii) $D_{100} = 77$. **(1p)**

(b) Calculate $\mu_1 = \mathbb{E}(X_1)$ and $\sigma_1 = \mathrm{SD}(X_1)$ and futhermore estimate the probabilities of the events $\{S \geq 67\}$ and $\{S \geq 55\}$ using the normal approximation of S (central limit theorem). **(2p)**

(c) Generate Z_B as in (a) and determine an approximate value S_A to S by equating the latter's normal approximation with the approximately normal Z_B when $D_{100} = 100$ and $D_{100} = 77$. What commonalities do you see with the events and probabilities in (b)? **(2p)**

Ex4 Mosquitoes will bite λ times per second on average in the forest. You only know that $0 \leq \lambda \leq 1$. As you arrive to the forest, it takes $x_1 = 5 + N$ seconds till the first bite. N is **the last digit of your student number** (0,1,...,9; ignore any possible letters). Write down the value of N clearly and use that numerical value in the calculations below.

(a) Model the unknown parameter λ as a random variable Λ and write a prior distribution $f_\Lambda(\lambda)$ which fits the problem statement above to it. **(1p)**

(b) Assume that the time X_i between consecutive bites follows the exponential distribution $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ with density function $f(x \mid \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$ when $x \geq 0$ and $= 0$ otherwise. Based on the prior and observation $X_1 = x_1$, calculate the posterior distribution for Λ (you can ignore the normalization constant). **(1p)**

(c) Calculate the maximum a posteriori estimate (posterior mode). **(2p)**

(d) We know that $\Lambda \geq \frac{1}{6}$ during the night and $\Lambda < \frac{1}{6}$ during daytime. According to the posterior distribution, which is more probable, that it's night or daytime? (hint: $\int \lambda e^{-\lambda a} d\lambda = -\frac{1}{a}\lambda e^{-\lambda a} - \frac{1}{a^2} e^{-\lambda a}$) **(2p)**