TENTAMEN, MATRISRÄKNING, MS-A0009

- Tid: 16:30–20:30
- Du får använda valfritt material, men att kommunicera med andra angående tentamen under dess gång är förbjudet.
- Dina lösningar måste vara skrivna för hand och tydligt läsliga. Oläsliga uppgifter rättas inte.
- Ditt namn och studentnummer måste vara synligt på varje sida.
- Varje uppgift ger högst fyra poäng. Hela tentamen ger högst 20 poäng.
- Motivera dina lösningar noggrannt, och skriv ut alla mellanled i beräkningarna. Svar utan motivering ger inga poäng.

Uppgift 1

Låt A vara en 3×3-matris med determinant $|A| = 0$. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två linjärt oberoende egenvektorer till A, båda med egenvärdet $\lambda = 2$. Ange (med motivering) för vart och ett av följande påstående om det är nödvändigtvis sant, nödvändigtvis falskt, eller om den givna informationen inte räcker för att avgöra om det är sant eller falskt.

a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ är en egenvektor till A.
b) A är inverterbar
c) A är diagonaliserbar.
d) Ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ har oändligt många lösningar.

Uppgift 2

Låt $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildningen som ges av $p(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, låt $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ges av $q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ y - z \end{pmatrix}$, oc låt $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara rotation $\pi/4$ radianer moturs.

a) Bestäm matrisrepresentationer för r, p och q.
b) Bestäm en matrisrepresentation för den sammansatta avbildningen

$$r \circ q \circ p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2.$$

Uppgift 3

Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) LU-faktorisera A, eller förklara varför A inte kan LU-faktoriseras.[1]
b) Diagonalisera A, eller förklara varför A inte är diagonaliserbar.

[1] En LU-faktorisering av en $m \times n$-matris M består av en nedre triangulär $m \times m$-matris L och en övre triangulär $m \times n$-matris U sådana att $M = LU$.

Uppgift 4

Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Beräkna en bas för nollrummet $\mathcal{N}(A)$.

b) Projicera vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ till $\mathcal{N}(A)$.

Uppgift 5

a) Singulärvärdesuppdela matrisen

$$A \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Låt $\tilde{A}$ vara den matris som fås från singulärvärdesuppdelningen av A genom att ersätta det mindre av de två singulärvärdena med 0. Beräkna $\tilde{A}$.