

**Instructions:** Write briefly and clearly, but give reasons for your answers. A number only as an answer does not yield points. The exam has 4 problems, each worth 0–6 points.

Write your answers in clear **handwriting**, either on paper or a tablet computer, and send them in PDF form to the return box on the exam page. Make sure your answers contain: course code, last name, first name, student number and date.

---

**P1** Let  $s$  be the **last digit of your student number** (one of  $0, \dots, 9$ , ignore possible letters). Write the value of  $s$  clearly in your answer and use this value in your calculations. Give your numerical answers with at least 4 decimals.

Professor N. Able has built a coin-shaking machine. A coin with two sides (heads and tails) is placed inside a drinking glass in some initial state (either “heads” or “tails”). Then the following process is repeated indefinitely: the glass is shaken vigorously for a while, which has probability  $p = 0.205 + 0.01s$  of turning the coin over (heads to tails, or vice versa); after shaking, the state of the coin is inspected. The states form a random sequence  $(X_0, X_1, X_2 \dots)$ , with  $X_0$  denoting the initial state.

- (a)  $(X_t)$  is a Markov chain. Write down its state space and transition matrix, and draw its transition diagram. **(1p)**
- (b) If the coin is initially “heads” and it is shaken 3 times, what is the probability that it is then “heads”? **(1p)**
- (c) If the coin is initially “heads” and it is shaken 3 times, what is the probability that it stays “heads” all this time? **(1p)**
- (d) Find the invariant distribution of this Markov chain, or all such distributions, if there are many. **(2p)**
- (e) Does the Markov chain have a unique limiting distribution, regardless of the initial state? Explain why or why not, using appropriate theorems. **(1p)**

**P2** An imaginary bird species reproduces as follows. During its lifetime, every individual lays two eggs, and from each egg a new bird hatches with probability  $2/3$ , independently of others. The first generation contains three birds.

- (a) What is the probability that there are no birds in the third generation? **(2p)**
- (b) What is the probability that the bird species eventually becomes extinct? **(4p)**

**P3** At any given time, the department's printer is either working (state 0), or in one of two different failure states (1 and 2). If it is working, then it has rates  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  of jumping to the failure states. If it is in failure state  $i$ , then it will be repaired, which takes a random time that has an exponential distribution with expected value  $1/\kappa_i$ , and returns the printer to the working state. Model the time evolution of the printer's state as a continuous-time Markov chain. In the long run, what is the proportion of time that the printer spends in each of the three states? **(6p)**

**P4** Let  $u$  be the **second to last digit of your student number** (one of  $0, \dots, 9$ , ignore possible letters; for example, if your student number is 34567K, then  $u$  is 6). Write the value of  $u$  clearly in your answer and use this value in your calculations. Give your numerical answers with at least 4 decimals.

During a meteor shower, amateur astronomer Stella observes shooting stars that appear according to a Poisson process with intensity  $\lambda = 0.405 + 0.01u$ , in units  $\frac{1}{\text{min}}$ , with the counter process denoted by  $N = (N(t))_{t \geq 0}$ . The unit of time  $t$  is minutes. Calculate the following quantities and justify your answers:

- (a) Probability  $\mathbb{P}(N(15) = 5)$  that during a quarter of an hour, Stella observes exactly five shooting stars. **(2p)**
- (b) Conditional probability  $\mathbb{P}(N(20) = 10 \mid N(10) = 5)$  that Stella observes ten shooting stars in total during the first twenty minutes, given that during the first ten minutes she observes five. **(2p)**
- (c) The expected number of shooting stars observed by Stella in two minutes. **(1p)**
- (d) The most probable number of shooting stars observed by Stella in two minutes. **(1p)**

**Ohje:** Vastaa lyhyesti ja ytimekkäästi, mutta perustele ratkaisusi. Pelkkä lukuarvo vastauksena ei anna pisteitä. Kokeessa on 4 tehtävää, jokaisesta saa 0–6 pistettä.

Tee ratkaisusi **käsin omalla käsialallasi** selvästi, joko paperille tai tablettitietokoneelle, ja lähetä ratkaisut PDF-muodossa tenttisivulla olevaan palautuslaatikkoon. Huolehdi, että vastauksessasi näkyy: kurssikoodi, sukunimi, etunimi, opiskelijanumero ja päivämäärä.

---

**T1** Olkoon  $s$  **sinun opiskelijanumerosi viimeinen numero** (eräs numeroista  $0, \dots, 9$ ; jätä mahdolliset kirjaimet huomioimatta). Merkitse  $s$ :n arvo vastaukseesi selvästi ja käytä laskuissa kyseistä numeroarvoa. Esitä numeeriset vastaukset vähintään 4 desimaalilla.

Professori N. Able on rakentanut kolikonravistelukoneen. Kolikko, jossa on kaksi sivua (kruuna ja klaava) asetetaan juomalasin sisään johonkin alkutilaan (kruuna tai klaava ylöspäin). Sitten seuraavaa prosessia toistetaan jatkuvasti: lasia ravistetaan jonkin aikaa, jolloin todennäköisyydellä  $p = 0.205 + 0.01s$  kolikko kääntyy (kruunasta klaavaksi tai päinvastoin); ravistelun jälkeen katsotaan kolikon asento. Asennot muodostavat satunnaisjonon  $(X_0, X_1, X_2 \dots)$ , missä  $X_0$  on alkutila.

- (a)  $(X_t)$  on Markov-ketju. Esitä sen tilajoukko ja siirtymämatriisi ja piirrä sen siirtymäkaavio. **(1p)**
- (b) Jos kolikko on aluksi asennossa “kruuna” ja sitä ravistetaan 3 kertaa, millä todennäköisyydellä se on tämän jälkeen kruuna? **(1p)**
- (c) Jos kolikko on aluksi asennossa “kruuna” ja sitä ravistetaan 3 kertaa, millä todennäköisyydellä se pysyy koko tämän ajan kruunana? **(1p)**
- (d) Ratkaise tämän Markov-ketjun tasapainojakauma tai kaikki tasapainojakaumat, jos niitä on useita. **(2p)**
- (e) Onko tällä Markov-ketjulla yksikäsitteinen rajajakauma, riippumatta alkutilasta? Perustele miksi tai miksi ei, käyttäen sopivia teoreettisia tuloksia. **(1p)**

**T2** Kuvitteellinen lintulaji lisääntyy seuraavasti. Elinaikanaan kukin yksilö munii kaksi muna, ja kustakin munasta kuoriutuu uusi lintu todennäköisyydellä  $2/3$ , muista riippumatta. Ensimmäisessä sukupolvessa on kolme lintua.

- (a) Mikä on todennäköisyys, että kolmannessa sukupolvessa ei ole yhtään lintua? **(2p)**
- (b) Mikä on todennäköisyys, että lintulaji kuolee joskus sukupuuttoon? **(4p)**

**T3** Kunakin ajanketkenä laitoksen tulostin joko toimii (tila 0) tai on jommassakummassa kahdesta virhetilasta (1 ja 2). Jos se toimii, sillä on hyppyvauhdit  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$  virhetiloihin. Jos se on virhetilassa  $i$ , niin se korjataan, mihin kuluu eksponenttijakautunut aika odotusarvolla  $1/\kappa_i$ , jonka jälkeen se palaa toimintatilaan. Mallinna tulostimen tilan kehitystä jatkuva-aikaisena Markov-ketjuna. Minkä osuuden ajasta tulostin viettää kussakin kolmesta tilasta pitkällä aikavälillä? **(6p)**

**T4** Olkoon  $u$  **sinun opiskelijanumerosi toiseksi viimeinen numero** (eräs numeroista  $0, \dots, 9$ ; jätä mahdolliset kirjaimet huomioimatta; jos esim. opiskelijanumerosi on 34567K, niin  $u$  on 6). Merkitse  $u$ :n arvo vastaukseesi selvästi ja käytä laskuissa kyseistä numeroarvoa. Esitä numeeriset vastaukset vähintään 4 desimaalilla.

Meteoriparven aikana tähtitieteen harrastaja Stella havaitsee tähdenlentoja, joita ilmaantuu Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä  $\lambda = 0.405 + 0.01u$ , yksikkönä  $\frac{1}{\text{min}}$ . Merkitään laskuriprosessia  $N = (N(t))_{t \geq 0}$ . Ajan  $t$  yksikkö on minuutti. Laske seuraavat suureet ja perustele vastauksesi:

- (a) Todennäköisyys  $\mathbb{P}(N(15) = 5)$ , että neljännestunnin aikana Stella havaitsee tasan viisi tähdenlentoa. **(2p)**
- (b) Ehdollinen todennäköisyys  $\mathbb{P}(N(20) = 10 \mid N(10) = 5)$ , että Stella havaitsee kymmenen tähdenlentoa ensimmäisten 20 minuutin aikana, jos hän havaitsee viisi tähdenlentoa ensimmäisten 10 minuutin aikana. **(2p)**
- (c) Odotusarvoinen tähdenlentojen määrä, jonka Stella havaitsee kahdessa minuutissa. **(1p)**
- (d) Todennäköisin tähdenlentojen määrä, jonka Stella havaitsee kahdessa minuutissa. **(1p)**