Institutionen för matematik och systemanalys
Aalto-universitetet, högskolan för teknikvetenskaper Metsalo

MS-A0409 Grundkurs i Diskret Matematik

Tentamen 2021-12-16

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Denna tentamen är av typ "open book". Föreläsningsmaterial och material på nätet får fritt användas. Likaså är det tillåtet att använda matematiska program.
I kurstentamen tas även poängen från övningsuppgifterna med i beräknandet av vitsordet, medan i sluttentamen bestäms vitsordet enbart av tentamensresultatet. Det bättre av dessa två alternativ ger det slutliga vitsordet.
Motivera lösningarna. Enbart ett talvärde som svar ger inga poäng. Skriv lösningarna tydligt för hand på papper (eller en tablettdator) och sänd den i form av en PDF-fil till motsvarande folder på kursens hemsida. Se till att **kurskod, efternamn, förnamn, namnteckning** samt **datum** står på varje sida.
Tentamenstiden är 4 timmar, **inklusive** tid för att skanna och skicka in lösningarna. Det är inte tillåtet att vara i kontakt med andra personer gällande tentamen under tentamenstiden.

1. Visa mha. induktion att $(1+x)^n \geq 1+nx$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $x \geq -1$. Ange klart och tydligt vilket induktionsantagande du gör och nämn också var kravet $x \geq -1$ används.

2. Teknologen Svakar skulle inhandla dricka för en bastukväll. Han hade fått oklara instruktioner av en kompis: "Köp tre eller fyra öl och två eller tre läsk åt mig!". I butiken fanns 13 olika sorters öl och 7 olika sorters läsk. På hur många olika sätt kan Svakar köpa dryckerna åt kompisen? Ge svaret på en så enkel form som möjligt.

3. Bestäm alla heltalslösningar (x, y) till a) $7x+5y=8$ och b) $6x-21y=12$.

4. Låt $(M,*)$ vara en grupp, dvs. en mängd M med en binär operation $*$, som uppfyller följand axiom:
(A0) $a, b \in M \Rightarrow a*b \in M$.
(A1) $(a*b)*c = a*(b*c), \forall a,b,c \in M$,
(A2) $\exists e \in M : a*e = a = e*a, \forall a \in M$,
(A3) $\forall a \in M (\exists a^{-1} \in M : a*a^{-1} = e = a^{-1}*a)$.
Visa att om $(a*b)^n = e$ för några $a, b \in M$ och för något $n \in \mathbb{Z}^+$, så är även $(b*a)^n = e$. Förklara vilket axiom som används i respektive steg.

5. Grafen G har grannmatrisen till höger.
a) Visa att G är isomorf med grafen nedan.
b) Bestäm grafens kromatiska tal.

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0&1&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&1&0&0&0&0&1&0 \\ 0&1&1&0&0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$