Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0103 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 Malinen / Laurén
MS-A0104 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 Malinen / Laurén

Kurssitentti, uusintatentti ja yleinen tentti 16.12.2021 klo 9:00–13:00.

Kurssitentti: Arvosanaan vaikuttavat viisi parasta tehtävää.
Uusintatentti: Arvosanaan vaikuttavat viisi parasta tehtävää.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.

Kaikki periodin I/2021 tai II/2021 luentokurssille osallistuneet voivat halutessaan toki laskea kaikki kuusi tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää".

Jos sinulla on laskaripisteitä I/2020-kursseilta, niin merkitse ensimmäiselle vastauspaperillesi "+ laskaripisteet".

1. a) Määritä sarjan
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^{k+1}}{5^{k-1}}$$
summa. (3p)
b) Millä muuttujan x arvoilla potenssisarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{3/2}(2x)^k$$
suppenee? (3p)

2. Määritä luvun cos(sin(0,1)) likiarvo korvaamalla ensin sini-funktio sen kolmannen asteen Maclaurin polynomilla $P_3(x)$ ja sen jälkeen kosini-funktio sen toisen asteen polynomilla $P_2(x)$. (6p)

   Huom: Maclaurin-polynomi = Taylor-polynomi pisteen $x_0 = 0$ suhteen.

3. a) Määritä funktion $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ derivaatta $f'(x)$. (2p)
b) Laske raja-arvo
$$\lim_{x \to 0+} f'(x),$$
jossa f' on laskettu tehtävän ensimmäisessä osassa. (4p)

4. Tarkastellaan yhtälön $f(x) = 0$ numeerista ratkaisemista Newtonin menetelmän avulla.
a) Selitä piirtämällä ja sanoin, miten menetelmään liittyvä palautuskaava
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

saadaan funktion kuvaajalle piirretyn tangenttisuoran avulla. (4p)
b) Laske ensimmäinen askel x_1 yhtälölle $x^4 - 2 = 0$, kun $x_0 = 2$. (2p)

5. a) Laske epäoleellinen integraali

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^3)^3}\,dx$$

esimerkiksi sijoittamalla $1 + x^3 = t$. (3p)
b) Laske integraali

$$\int_0^{\pi/2} x\sin(2x)\,dx. \quad (3\text{p})$$

6. Määritä differentiaaliyhtälön $y'' - 2y' - 8y = 14e^{-3x}$ yleinen ratkaisu. (6p)