Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu — Alestalo

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0305 Differentiaali- ja integraalilaskenta 3

Kurssitentti ja yleinen tentti 20.12.2021 klo 9.00–13.00.

Kurssitentin uusinta: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.
Jokainen kurssille I/2021 osallistunut voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää".

1. Päivystävä dosentti on keksinyt uuden voiman, joka vaikuttaa vain Maapallon ulkopuolisessa avaruudessa $A\colon x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2$. Uuden voiman energiatiheys on pallokoordinaattien avulla ilmaistuna muotoa

$$u(r, \varphi, \theta) = C\,\frac{2 + \cos(\theta)}{r^4},$$

jossa $C > 0$ on vakio. Laske uuden voimakentän kokonaisenergia

$$E = \iiint_A u\,dV$$

epäoleellisen avaruusintegraalin avulla. (Vastaukseen voi jäädä vakiot C ja R.)

2. a) Laske vektorikentän $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ viivaintegraali pisteestä $(2, 0, 0)$ pisteeseen $(0, 2, 0)$
(i) pisteiden välistä janaa C_1 pitkin.
(ii) pitkin tasossa $z = 0$ sijaitsevaa (origokeskisen) neljännesympyrän kaarta C_2.
b) Onko vektorikentällä $\mathbf{F}$ potentiaalia?

3. Laske viivaintegraali

$$\oint_{\partial D} y^2\,dx - x^2\,dy$$

esimerkiksi Greenin kaavan avulla, kun D on kolmio, jonka kärjet ovat pisteissä $(0, 0)$, $(1, 0)$ ja $(0, 2)$.

4. Tarkastellaan vektorikenttää

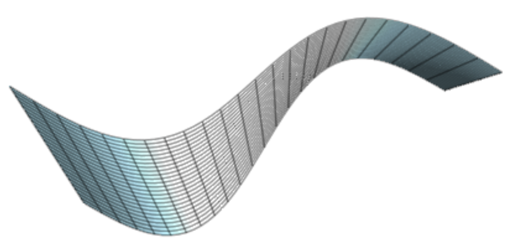
$$\mathbf{F}(x,y,z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}.$$

a) Osoita, että vektorikentän $\mathbf{F}$ lähteisyys (eli divergenssi) $\nabla \cdot \mathbf{F}$ ja pyörteisyys (eli roottori) $\nabla \times \mathbf{F}$ ovat molemmat nollia.
b) Edellisen kohdan perusteella vektorikentällä $\mathbf{F}$ on sekä skalaari- että vektoripotentiaali. Määritä molemmat potentiaalit.

5. Skeittikingi on kehittänyt uuden kaarretyypin, jonka muotoa kuvaa parametrisointi $\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$,

$$\begin{cases} x = uv \\ y = v - u \\ z = \sin(v), \end{cases}$$

kun $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 2\pi$. Määritä kaarteen kaltevuuskulma (asteen tarkkuudella) parametrien arvoja $u = 1$ ja $v = \pi$ vastaavassa kohdassa.
Vihje: Kaltevuuskulma on pinnan (ylä)normaalin ja pystysuoran yksikkövektorin $\mathbf{k}$ välinen kulma.



6. Laske vektorikentän

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$$

vuo ulospäin sylinterin

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ 0 \le z \le 6\}$$

reunan läpi. Voit käyttää joko Gaussin lausetta tai pintaintegraalia.