

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Voit käyttää laskinta (tai Matlabia) ja kurssin materiaalia. Perustele ratkaisusi: pelkkä lopputulos ei riitä. Koetehtävät on ratkottava itsenäisesti. Kerro mitä lähteitä käytit ratkaisuisi.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteuttaa jokaisen tehtävän asteikolla 0...3. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

1. Etsi kaikki vektorit $v \in \mathbb{R}^3$, jotka ovat kohtisuorassa sekä vektoria $(1, 2, 3)$ että vektoria $(3, 2, 1)$ vastaan.

2. Mikä yhdistää kompleksilukujen kertolaskua ja matriisikertolaskua

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \dots, \text{ missä } a, b, c, d \in \mathbb{R} ?$$

3. Palaessaan vety yhdistyy happeen tuottaen vettä: molekyylit ovat tässä H_2 , O_2 ja H_2O . Muodosta tämän palamisreaktion kaava, esitä vastaava liittomatriisi ja ratkaise se Gauss-eliminaation avulla.

4. Laske Gauss-eliminaatiolla matriisin $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ käänteismatriisi A^{-1} .

Tarkista tuloksesi, siis että $A^{-1}A = I$.

5. Miksi matriisi $M^*M \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ ei voi olla kääntyvä millään lukuarvoilla $a, b, c \in \mathbb{C}$, missä $M = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$?

6. Laske matriisin $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ominaisarvot, kun $a + d = 4 = \det[A]$.

7. Oletetaan, että $Au = \lambda u$ ja $Av = \mu v$, missä $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, $u, v \in \mathbb{C}^{3 \times 1}$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ siten, että $\|u\| \neq 0 \neq \|v\|$ ja $\lambda \neq \mu$. Miksi $u + v$ ei voi olla matriisin A ominaisvektori?

8. Oletetaan, että positiivinen matriisi $P \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ on myös unitaarinen. Mitä voidaan silloin sanoa sen ominaisarvoista?

9. Etsi matriisin A^*A ominaisarvot ja ominaisvektorit, kun $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

10. Etsi SVD eli singulaariarvohajoitus matriisille $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.