# ELEC-A7200 Signaalit ja järjestelmät

Syksy 2019, Uusintakoe

13.01.2020

Huom. Jos olet osallistunut jompaan kumpaan tai molempiin välikokeisiin, kurssiarvosanan määrittelyyn valitaan tämän kokeen ja välikokeen vastaavista tehtävistä se josta olet saanut enemmän pisteitä.

### Tehtävä 1

a) (2p.) Olkoot $x_1(t)$ ja $x_2(t)$ ortonormaaleja signaaleja. Ratkaise

$$\langle x_1(t) - 2x_2(t), 3x_1(t)\rangle \quad \text{ja} \quad \langle 3x_1(t) - 2x_2(t), x_2(t)\rangle$$

b) (2p.) Olkoon $x_3(t) = \text{tria}\,(t-1)$, missä

$$\text{tria}(t) = \begin{cases} 1+t, & -1 \le t < 0 \\ 1-t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

Esitä signaali $x_4(t) = \frac{dx_3(t)}{dt}$ muotoa $\text{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$, olevien kanttipulssien lineaarikombinaationa, missä

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Piirrä signaalien $x_3(t)$ ja $x_4(t)$ kuvaajat.

c) (2p.) Ratkaise

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_3(t)\,\delta(t-1)\,dt,$$

missä $\delta(t)$ on Diracin delta funktio.

d) (4p.) Olkoon $x_5(t) = e^{-2t}u(t)$, missä $u(t)$ on yksikköaskelfunktio:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Ratkaise signaalin $x_5(t)$ konvoluutio itsensä kanssa:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_5(\tau)x_5(t-\tau)\,d\tau.$$

Vihje: Piirrä kuvaaja.



### Tehtävä 2

Tarkastellaan kolmiopulssia

$$x(t) = \begin{cases} 1-|t|, & |t| \le 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

a) (3p.) Laske signaalin $x(t)$ energia.

b) (2p.) Ratkaise pulssin $y(t) = x(\alpha t)$ Fourier'n muunnos $Y(f)$.

c) (2p.) Ratkaise pulssin $y(t) = x(t-\beta)$ Fourier'n muunnos $Y(f)$.

d) (3p.) Ratkaise pulssin $y(t) = x(\alpha(t-\beta))$ Fourier'n muunnos $Y(f)$.

### Tehtävä 3

a) (2p.) Ratkaise jaksollisen signaalin $x(t) = 2\cos(2\pi f_c t)$ Fourier-muunnos $X(f)$.

b) (2p.) Ratkaise pulssin $p(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ Fourier-muunnos $P(f)$, kun $T > 0$.

c) (4p.) Ratkaise pulssin $y(t) = x(t)p(t)$ Fourier muunnos $Y(f)$ sekä energiaspektritiheys $|Y(f)|^2$.

d) (2p.) Ratkaise pulssin $y(t)$ energia kun $f_c = 1$ ja $T = 1$.

### Tehtävä 4

Pulssia

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 < t \le \frac{3}{2} \\ 3-t, & \frac{3}{2} < t \le 3 \\ 0, & \text{muulloin,} \end{cases}$$

näytteistetään välillä $[0, 1]$. Näyteväli $T_s = \frac{1}{3}$.

a) (1p.) Ratkaise näytesekvenssi $\{x(n)\} = \{x(0), x(1), x(2), x(3)\}$.

b) (3p.) Ratkaise näytepisteiden $\{x(n)\}$ diskreetti Fourier-muunnos (DFT): $\{X(k)\}$.

c) (2p.) Mitä taajuuksia DFT:n indeksit $k = 0, 1, 2, 3$ vastaavat?

d) (2p.) Näytepisteisiin lisätään kahdeksan nollaa. Miten täma vaikuttaa DFT:n taajuusresoluutioon?

e) (2p.) Selitä miksi pulssin $x(t)$ näytteenotossa tapahtuu aliasointia.

**Tehtävä 5**

LTI-järjestelmän heräte $x(t)$ ja vaste $y(t)$ toteuttavat differentiaaliyhtälön

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + y = x.$$

a) (5p.) Ratkaise järjestelmän taajuusvaste $H(f)$.

b) (5p.) Laske amplitudivaste $A(f) = |H(f)|$ ja taajuusvaste $\phi(f) = -\arg\{H(f)\}$ taajuuden arvoille 0.1 Hz ja 10 Hz.

**Tehtävä 6**

Erään satunnaissignaalin autokorrelaatiofunktio on

$$r_{\tilde{y}\tilde{y}}(\tau) = E\{\tilde{y}(t)\tilde{y}^*(t-\tau)\} = \exp(\frac{2|\tau|}{\alpha})$$

a) (2p.) Ratkaise signaalin keskimääräinen teho $E\{|\tilde{y}(t)|^2\}$.

b) (3p.) Ratkaise signaalin tehospektri $S_{yy}(f)$.

Valkoisen kohinan tehospektri on $S_{zz}(f) = N_0/2$.

(2p.) Erään signaalin kaistanleveys on $B$. Ratkaise kohinan teho signaalin kaistalla.

(3p.) Ratkaise *stabiilin* suodattimen taajuusvaste $H(f)$ siten että $S_{yy}(f) = |H(f)|^2 S_{zz}(f)$.

| **Theorems of the fourier transform** | **Function** | **Transform** |
|---|---|---|
| Linearity | $ax(t) + by(t)$ | $aX(f) + bY(f)$ |
| Time delay or time shift | $x(t-a)$ | $X(f)e^{-j2\pi fa}$ |
| Scale change | $x(at)$ | $\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{f}{a})$ |
| Conjugation | $x^*(t)$ | $X^*(-f)$ |
| Duality | $X(t)$ | $x(-f)$ |
| Frequency shift | $x(t)e^{j2\pi at}$ | $X(f-a)$ |
| Linear modulation | $x(t)\cos(2\pi at+b)$ | $\frac{e^{jb}X(f-a)+e^{-jb}X(f+a)}{2}$ |
| Differentiation | $\frac{d^n x(t)}{dt^n}$ | $(j2\pi f)^n X(f)$ |
| Integration | $\int_{-\infty}^{t} x(u)du$ | $\frac{X(f)}{j2\pi f}$ |
| Convolution | $x(t)\otimes y(t)$ | $X(f)Y(f)$ |
| Multiplication | $x(t)y(t)$ | $X(f)\otimes Y(f)$ |
| Multiplication by $t^n$ | $t^n x(t)$ | $-\frac{1}{j2\pi}\frac{d^n X(f)}{df^n}$ |

| **Fourier transforms** | **Function** | **Transform** |
|---|---|---|
| Rectangular pulse | $\mathrm{rect}(t/a)$ | $a\cdot\mathrm{sinc}(af)$ |
| Triangular pulse | $\mathrm{tria}(t/a)$ | $a\cdot\mathrm{sinc}^2(af)$ |
| Gaussian pulse | $e^{-\pi(\frac{t}{a})^2}$ | $a\cdot e^{-\pi(af)^2}$ |
| One sided exponential pulse | $e^{-t/a}u(t)$ | $\frac{a}{1+j2\pi fa}$ |
| Two sided exponential pulse | $e^{-\lvert t\rvert/a}$ | $\frac{2a}{1+(2\pi fa)^2}$ |
| Sinc pulse | $\mathrm{sinc}(at)$ | $\frac{1}{a}\mathrm{rect}(f/a)$ |
| Constant | $a$ | $a\cdot\delta(f)$ |
| Phasor | $e^{j(2\pi at+b)}$ | $e^{jb}\delta(f-a)$ |
| Cosine wave | $\cos(2\pi at+b)$ | $\frac{e^{jb}\delta(f-a)+e^{-jb}\delta(f+a)}{2}$ |
| Delayed impulse | $\delta(t-a)$ | $e^{-j2\pi fa}$ |
| Step | $u(t)$ | $\frac{\delta(f)}{2}+\frac{1}{j2\pi f}$ |



$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$
$$e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi)$$
$$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$$
$$\cos(\phi) = \sin(\phi + \pi/2)$$
$$\sin(\phi) = \cos(\phi - \pi/2)$$
$$\cos^2(\phi) = \frac{1}{2}\Big[1 + \cos(2\phi)\Big]$$
$$\sin^2(\phi) = \frac{1}{2}\Big[1 - \sin(2\phi)\Big]$$
$$\cos^3(\phi) = \frac{1}{4}\Big[3\cos(\phi) + \cos(3\phi)\Big]$$
$$\sin^3(\phi) = \frac{1}{4}\Big[3\sin(\phi) - \sin(3\phi)\Big]$$
$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$$
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{j2\pi k f_0 t} = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[\alpha_k\cos(2\pi k f_0 t) + \beta_k\sin(2\pi k f_0 t)\Big]$$
$$x_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$
$$\alpha_k = 2\cdot\mathrm{Re}\{x_k\}, \quad \text{when } x(t)\in\mathbb{R}$$
$$\beta_k = -2\cdot\mathrm{Im}\{x_k\}, \quad \text{when } x(t)\in\mathbb{R}$$
$$X(f) = \mathcal{F}\Big\{x(t)\Big\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$
$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\Big\{X(f)\Big\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$
$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi kn/N}$$
$$x_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{j2\pi kn/N}$$
$$f_0 = \frac{1}{N\cdot T_s} = \frac{f_s}{N}$$
$$s = \sigma + j\omega = \sigma + j2\pi f$$
$$X(s) = \mathcal{L}\Big\{x(t)\Big\} = \int_0^{\infty} x(t)\cdot e^{-st}dt$$
$$d_n = \frac{u_n}{u_1}$$
$$d_{\mathrm{tot}} = \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} d_n^2}$$