



Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)

MS-A0201

Hakula/Moring

Kurssitentti, 21.2.2022



Tämä kurssitentti on osa jatkuvaa arviointia. Moniosaisten tehtävien osien painoarvo on sama ellei muuta ole erikseen osoitettu. Kurssipalautteesta saa yhden tenttipisteen. Maksimipistemäärä kokeessa on 36.

**TEHTÄVÄ 1** Parametrisoitu tasokäyrä  $x = \cos t$ ,  $y = \sin(2t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , muistuttaa  $\infty$ -merkkiä. Käyrä leikkaa itseään origossa parametrin arvoilla  $t = \pi/2$  ja  $t = 3\pi/2$ . Laske vastaavien tangenttivektoreiden välinen kulma.

**TEHTÄVÄ 2** Määritä elliptisen paraboloidin  $z = x^2 + 3y^2$  normaalivektori ja tangenttitason yhtälö pisteessä  $(2, 1, 7)$ .

**TEHTÄVÄ 3** Olkoon  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  ja  $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . (a) Johda kaava

$$\nabla f(r) = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r},$$

kun  $f$  on derivoituva yhden muuttujan funktio. b) Määritä  $\nabla r$  ja  $\nabla \frac{1}{r}$ .

**TEHTÄVÄ 4** Määritä funktion

$$f(x, y) = 2x^3 + x^2y + 6x^2 - y$$

kaikki kriittiset pisteet.

**TEHTÄVÄ 5** Yksikkökieken  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  hetkellistä lämpötilaa kuvaa funktio  $f(x, y) = 10(x + y)e^{-x^2 - y^2}$ . Määritä kiekon kuumin ja kylmin kohta.

**TEHTÄVÄ 6** Kolmion  $K$  kärkipisteet ovat  $(0, 2)$ ,  $(1, 0)$  ja  $(0, -1)$ . Laske tasointegraali

$$\iint_K 2x \, dA.$$