Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
MS-A0104 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 Malinen / Laurén

Kurssitentin uusinta ja yleinen tentti 21.1.2022 klo 13:00–16:00.

Kurssitentin uusinta: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.

Kaikki periodin II/2021 luentokurssille osallistuneet voivat halutessaan laskea kuusi tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”.

1. Määritä kaikki reaaliluvut $x \in \mathbb{R}$, joilla sarja
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n}{2^n} x^n$$
suppenee. (4p) Tutki myös mahdolliset suppenemisvälin päätepisteet. (2p)

2. a) Määritä funktion $f(x) = x^2 \sin(3x)$ Maclaurin-polynomi $P_5(x)$. (Maclaurin-polynomi = Taylor-polynomi, kun $x_0 = 0$). (2p)

   b) Laske seuraavat raja-arvot:
$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^{1/3}-1}{x} \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \quad (4\text{p}).$$

3. a) Laske funktion $\tan x$ derivaatta (olettaen funktioiden sin ja cos derivaatat tunnetuiksi). (3p)
   b) Johda funktion $f(x) = \arctan x$ derivaatan lauseke. (3p)

4. Laske integraali
$$\int_0^4 \ln\left(1+\sqrt{x}\,\right) dx$$
sijoittamalla aluksi $x = t^2$ ja käyttämällä sen jälkeen osittaisintegrointia. (6p)

5. a) Määritä differentiaaliyhtälölle
$$y'' - 3y' + 2y = 10 \sin x$$
sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$. (3p)

   b) Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = 6xy^3$ alkuehdolla $y(0) = 1$. (3p)

6. Olkoon p ja q sellaisia vakioita, joilla funktiot $y_1(x) = e^{2x}$ ja $y_2(x) = e^{-x}$ ovat differentiaaliyhtälön
$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$$
ratkaisuja. Etsi tällöin differentiaaliyhtälön
$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = x$$
yleisen ratkaisun lauseke. (6p)