Matriisilaskenta
Aalto-yliopiston kurssikoodit: MS-A0002 (SCI), MS-A0003 (ELEC1, ENG1)
25.2.2022, 16:30–20:30 (Turunen / Bergman)

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Voit käyttää laskinta (tai Matlabia) ja kurssin materiaalia. Perustele ratkaisusi: pelkkä lopputulos ei riitä. Koetehtävät on ratkottava itsenäisesti. Kerro mitä lähteitä käytit ratkaisuissasi.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteyttää jokaisen tehtävän (1–9) asteikolla 0...3. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

Huom! Tehtävät ovat seuraavalla sivulla!

1. Hetkellä $t \in \mathbb{R}$ ollaan tason pisteessä $(3-t, t+5) \in \mathbb{R}^2$. Millä hetkellä ollaan lähinnä origoa? Ja mikä on silloin etäisyys origosta?

2. Etsi seuraavien ehtojen määräämien tason pisteiden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ joukot ja hahmottele joukkojen kuvat:
   (a) $(x+\mathrm{i}y)^4 = 1$.
   (b) $\mathrm{Re}((1+\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y)) < 0$.
   (c) $2 \leq |x+\mathrm{i}y-3| < 5$.

3. Etsi kaikki vektorit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, jotka ovat vektoreita $u, v, w \in \mathbb{R}^4$ vastaan kohtisuorassa, missä
$$u = (1,1,1,1), \quad v = (1,2,3,4), \quad w = (1,4,9,16).$$
Kirjoita yhtälö liittomatriisina, ratkaise se Gauss-eliminaatiolla ja ilmoita ratkaisusi parametrin $t = x_1 \in \mathbb{R}$ suhteen.

4. Määritellään funktio $f : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$ kaavalla $f(A) = A_{11}+A_{22}+A_{33}$, missä $A_{jk} \in \mathbb{R}$ on matriisin A rivin j sarakkeen k alkio. Voidaanko matriisi $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ löytää, jos jokaisella matriisilla $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tunnetaan luvut $f(XB) \in \mathbb{R}$? Perustele!

5. Tarkastellaan matriiseja $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ ja $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.
Miksi ei voi päteä $AB = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$? Perustele! (Vihje: ... kääntyvyys...)

6. Luentomonisteessa esiteltiin determinantin laskusäännöt L1, L2, L3, L4, L5 (missä tosin L5 on sääntöjen L3 ja L4 seuraus). Laske vaiheittain näiden sääntöjen avulla determinantti $\det[M]$, kun $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (Merkitse näkyville, missä kohtaa mitäkin laskusääntöä käytät!)

7. Etsi matriisin $A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja kaikki mahdolliset ominaisvektorit. Onko A diagonalisoituva? Perustele!

8. Näytä, että matriisi $N = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ on normaali. Etsi matriisin N unitaarinen diagonalisointi.

9. Laske edellisen tehtävän matriisin N singulaariarvohajoitelma (eli SVD) $N = U\Sigma V^*$.