

TENTTI / TENT / EXAM

Kurssikoodi / Kurskod / Course code	MS-E2148	Kurssin nimi / Kursnamn / Course name	Dynamic optimization
Tentin päivämäärä / Tent datum / Exam date	24.2.2022	Tentin kesto / Provtid / Exam duration	3 h
Vastuunopettaja / Ansvarig lärare / Responsible teacher		Tenttipaperin kieli(kielet) / Tentpapperets språk / Language(s) of the exam paper	English
<input type="checkbox"/> Välikoe / Mellanprov / Midterm exam		<input checked="" type="checkbox"/> Tentti / Tent / Final exam	

SALLITUT APUVÄLINEET

TILLÄTNA HJÄLPMEDEL

ALLOWED MATERIAL

Tentissä saa käyttää vain kynää, kumia, viivainta ja harppia sekä niitä apuvälineitä jotka ovat merkitty sallituiksi oheiseen listaan.

I tenten får man använda enbart penna, radergummi, linjal och passare samt hjälpmedel som är markerat som tillåtet i listan nedan.

In the exam it is only allowed to use a pen, eraser, ruler and compass and the material that is marked as allowed in the list below.

	Sallittu Tillåten Allowed	Kielletty Förbjuden Forbidden
Funktiolaskin / Funktionsräknare / Regular calculator	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Graafinen laskin (tyhjennettävä) / Grafräknare (bör tömmas) / Graphical calculator (to be emptied)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Laininen: kaava- ja taulukkokokoelma (valvojat jakavat) / formel och tabellsamling / formulary and table compendium	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Mellin: kaava- ja taulukkokokoelma (opiskelijat tuovat itse) / formel och tabellsamling / formulary and table compendium	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Muu materiaali (materiaali eriteltyä ja ohjeet sen tarkastukseen alla) / Övrig material (nedan) / Other material (below)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

MUUT OHJEET / ÖVRIGA ANVISNINGAR / OTHER INSTRUCTIONS

<input type="checkbox"/> Tenttipaperi on palautettava valvojille Tentpapperet bör inlämnas åt övervakarna Exam paper must be returned	<input checked="" type="checkbox"/> Tenttipaperin saa viedä mukanaan Tentpapperet får tas med The exam paper can be taken
---	---

Kirjoita selvällä käsialalla jokaiseen vastauslomakkeeseesi tentin päivämäärä ja sali, kurssikoodi ja -nimi, opiskelijanumerosi, nimesi, koulutusohjelmasi ja allekirjoituksesi.

Jätä apuvälineet joita ei tarvita tentissä (kuten kännykät tai muut elektroniset laitteet) salin sivuille tai valvojille.

Varmista että nimesi kirjataan osallistujalistaan palauttaessasi vastauksesi. Tämä todistaa palautuksesi mikäli vastauslomakkeesi katoavat.

Suttupaperit merkitään kirjoittamalla paperiin suurilla kirjaimilla sana "SUTTU" ja vetämällä henkselit kirjoitusta sisältävien sivujen yli. Suttupapereita ei arvostella.

Tentissä noudatetaan yliopiston tenttiohjesääntöä.

Tenttikysymykset alkavat seuraavalta sivulta. KÄÄNNÄ SIVUA VAIN LUVALLA!

Skriv tydligt i varje svarsblankett tentens datum och sal, kurskod och -namn, samt ditt studienummer, namn, utbildningsprogram och underskrift.

Lämna de hjälpmedel som inte behövs i tenten (bl.a. mobiltelefoner och övriga elektroniska apparater) vid salens sidor eller åt övervakarna.

Försäkra att ditt namn skrivs på deltagarlistan när du inlämnar din prestation. Det bevisar din inlämning ifall dina svarsblanketter försvinner.

Klotterpapperen markeras med att skriva med stora bokstäver ordet "SUTTU" och med att dra ett kryss över varje sida som innehåller skrift. Klotterpapperen bedöms ej.

I tenten följer man universitetets tentamensregler.

Tentfrågorna börjar på nästa sida. VÄND SIDA ENBART MED TILLSTÄND!

Write clearly on every answer sheet the exam date and hall, course code and name, and your study number, name, study programme and signature.

Leave material that is not needed in the exam (e.g. mobile phones or other electrical devices) on the sides of the hall or to the supervisors.

Ensure that your name is written in the list of participants when returning your answers. It proves the returning if your answer sheets get lost.

Scratch papers are marked with the word "SUTTU" in capital letters and by drawing a large cross over all pages that have writing on them. Scratch papers are not graded.

The university's exam regulations are followed in the exam.

Exam questions start on the next page. TURN PAGE ONLY WITH PERMISSION!

Exam 24.2.2022

In each task, you can get a maximum of 6 points for the correct solution. You can reach a maximum of 30 points in the exam.

1. Explain shortly.
 - a. What does the variation of a functional mean?
 - b. What is a minimum control-effort problem (optimal control)?
 - c. What is the principle of optimality (DP)?
 - d. What is Pontryagin's minimum principle?
 - e.-f. What are the Euler-Lagrange equations and how are they derived?

2. Minimize the functional

$$J(x) = \int_0^2 [x^2(t) + 2\dot{x}(t)x(t) + \dot{x}^2(t)] dt$$

using calculus of variation, when $x(0) = 1$ and $x(2) = -3$. Explain what you are doing.

Hint: To solve the differential equation that occurs, differentiate. The coefficients should be given, but do not have to be computed explicitly.

3. At time $t = 0$, a unit mass is at rest in position $z = 0$. The mass is on a frictionless surface. The goal is to move the mass on the surface, so that it is in the same place $z = 0$ at time $t = T$, but so that it has the speed $\dot{z} = 1$. To move the mass, a force $u(t)$ is used, which is restricted by $-1 \leq u(t) \leq 1$. The situation is described by Newton's second law:

$$\ddot{z} = u(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

with the end point conditions $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$, $z(T) = 0$, and $\dot{z}(T) = 1$.

Find the control $u(t)$ that minimizes the end time T ,

$$T = \int_0^T dt.$$

Find also the minimum time T^* .

Hint: the state variable is $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$, where $x_1 = z$ and $x_2 = \dot{z}$.

4. Let us examine the problem

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t) - 1, \quad x(0) = 1,$$

$$J(u) = x^2(1) + \int_0^1 u^2(t) dt.$$

Solve the optimal control using the HJB.

Hint: use the trial

$$V(t, x) = q(t)x^2 + 2k(t)x + m(t),$$

and derive differential equations to q , k , m .

5. Air transportation is available between n cities, in some cases directly and in others through intermediate stops and change of carrier. The airfare between cities i and j is denoted by a_{ij} . We assume that $a_{ij} = a_{ji}$, and for notational convenience, we write $a_{ij} = \infty$ if there is no direct flight between i and j . The problem is to find the cheapest airfare for going between two cities perhaps through intermediate stops.

Let $n = 6$ and $a_{12} = 30$, $a_{13} = 60$, $a_{14} = 25$, $a_{15} = a_{16} = \infty$, $a_{23} = a_{24} = a_{25} = \infty$, $a_{26} = 50$, $a_{34} = 35$, $a_{35} = a_{36} = \infty$, $a_{45} = 15$, $a_{46} = \infty$, $a_{56} = 15$. Find the cheapest airfare from every city to every other city by using the DP algorithm. Draw a diagram to illustrate your results.

APPENDIX:

$$\text{HJB: } 0 = J_t + \min_{u(t)} \{g + J_x^T f\}$$

$$\text{E-L: } 0 = g_x - \frac{d}{dt}(g_{\dot{x}})$$

$$\text{Hamiltonian: } H = g + p^T(t)f(x(t), u(t), t)$$

$$\text{costate: } \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\text{free final state: } 0 = g_{\dot{x}} \text{ or } h_x - p = 0$$

$$\text{free final time: } 0 = g - g_{\dot{x}}\dot{x} \text{ or } H + h_t = 0$$

$$\text{free final state and time: } g = g_{\dot{x}} = 0 \text{ or } h_x - p = 0 = H + h_t$$

$$\text{goal: } 0 = g + \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right]^T \left[\frac{d\theta}{dt} - \dot{x}\right] \text{ or } H + h_t + (h_x - p)^T \frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$\text{W-E: } g_{\dot{x}} \text{ and } g - g_{\dot{x}}\dot{x} \text{ continuous}$$

Good luck!