



Aalto-yliopisto

MS-A0004 Matriisilaskenta, periodi I, 2021

Loppukoe ja tentti, 28.10.2021 klo 9.00–13.00

Kokeessa saa käyttää kaikkia apuvälineitä, mutta sen aikana ei saa kommunikoida muiden kanssa. Ratkaisusta täytyy käydä ilmi välivaiheet, joiden kautta lopputulokseen on päädytty käsin laskien, jollei tehtävänannossa muuta mainita.

Jos suoritat loppukokeen, vain neljä eniten pisteitä tuottavaa ratkaisua huomioidaan kurssin loppuarvostelussa yhdessä laskuharjoituspisteiden kanssa. Jos suoritat tentin, kaikkien viiden tehtävän ratkaisut huomioidaan arvostelussa; tällöin laskuharjoituspisteitä ei puolestaan huomioida. Parempi näistä kahdesta suorituksesta jää voimaan.

- Tehtävä 1.**
- a) Olkoot $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ja $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Laske sisätulo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Mikä on vektorien \mathbf{u} ja \mathbf{v} välinen kulma? Likiarvo riittää kahden desimaalin tarkkuudella. (2p.)
- b) Esitä kompleksiluku $(1 + i)^{10}$ napakoordinaateissa siten, että napakulma (argumentti) on välillä $]-\pi, \pi]$. Voit käyttää tietoa, että $\tan \theta = 1$ ratkaisu välillä $[0, \pi/2)$ on $\pi/4$. (2p.)
- c) Etsi determinantin avulla jokin luku $c \in \mathbb{R}$, jolla matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & c \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

ei ole kääntyvä. Tässä tulee käyttää 3×3 determinantin laskukaavaa, näyttää välivaiheet ja suora verkosta/laskimesta löydetty vastaus ei riitä. (2p.)

- Tehtävä 2.**
- a) Piste $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$ toteuttaa yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$$

Onko se kyseisen yhtälöryhmän yksikäsitteinen ratkaisu? Perustele vastauksesi. (3p.)

- b) Määritä kaikki ratkaisut yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 1 \end{cases} .$$

käyttäen Gaussin eliminaatiota (näytä välivaiheet) (3p.)

Tehtävä 3. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

- a) Muodosta matriisit $A^T A$ ja AA^T . (2p.)
- b) Laske A :n käänteismatriisi A^{-1} käyttäen Gaussin eliminaatiota. Näytä välivaiheet. (4p.)

Tehtävä 4. Diagonalisoi matriisi

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(Ominaisarvot määrittävän polynomiyhtälön saa halutessaan ratkaista käyttäen apuvälineitä, mutta kyseinen yhtälö täytyy kuitenkin muodostaa käsin laskien.)

Vihje: Yksi B :n ominaisarvoista on nolla. Lisäksi B on symmetrinen, mikä mahdollistaa unitaarisen diagonalisoinnin.

Tehtävä 5. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

- a) Laske matriisi $B = A^T A$ ja diagonalisoi se. Näytä välivaiheet. (3p.)
- b) Muodosta matriisille A singulaariarvohajotelma. Näytä välivaiheet. (3p.)