

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0204 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2
MS-A0205 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2

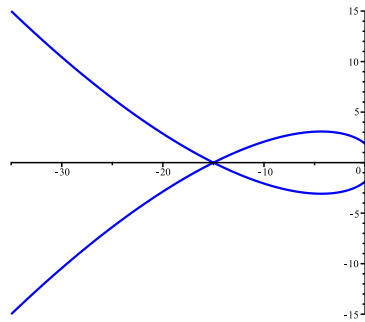
Alestalo / Takala
Malinen / Laurén

Kurssitentti ja yleinen tentti 21.2.2022 klo 9:00–13:00.

**Kurssitentin uusinta: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.**

Kaikki periodin III/2022 luentokurssille osallistuneet voivat halutessaan laskea kuusi tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”.

1. Parametrisoitu tasokäyrä $x = 1 - 4t^2$, $y = 4t - t^3$, $t \in \mathbf{R}$, muodostaa kuvion mukaisen silmukan.
 - a) Määritä leikkauskohtaa vastaavat parametrin t kaksi eri arvoa. (1 p.)
Vihje: $y = 0$.
 - b) Määritä a-kohdassa saatuja parametrin arvoja vastaavat tangenttivektorit ja laske niiden välinen kulma. (3 p.)
 - c) Millainen integraali antaa leikkauspisteen rajaaman silmukan kaarenpituisuuden? Integraalin arvoa ei tarvitse laskea (mutta sen voi tehdä numeerisesti sopivalla ohjelmalla). (2 p.)



2. Määritä pinnan

$$x^2 - 2xy + y^5 - \sin z = 0$$

pisteeseen $(1, 1, 0)$ asetetun tangenttitason yhtälö.

3. Johda funktion $f(x, y) = e^{-x} \sin 2y$ toisen asteen Taylorin polynomi pisteen $(0, 0)$ ympäristössä.

4. Määritä funktion $f(x, y, z) = 2x - 4y + 8z$ suurin ja pienin arvo pallopinnalla $x^2 + y^2 + z^2 = 21$ Lagrangen kertojien menetelmällä.
5. Suppeneeko epäoleellinen tasointegraali

$$\iint_B \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dA,$$

kun $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$?

Vihje: $\frac{d}{dr} \ln(1 + r^2) = \text{jotain hyödyllistä.}$

6. Tarkastellaan $2a$ -sivuista kuutiota D , joka voidaan kuvata epäyhtälöin

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid -a \leq x \leq a, -a \leq y \leq a, -a \leq z \leq a\}.$$

Oletettakoon kuution sisältämän materiaalin tiheyden toteuttavan $\rho(x, y, z) = |z| + a$. Pyöritetään kuutiota z -akselin ympäri, jolloin sen hitausmomentti on

$$I_z = \iiint_D \rho(x, y, z)(x^2 + y^2) dV.$$

Etsi arvo geometriselle vakiolle k , jolla hitausmomentti saadaan esitettyä muodossa $I_z = kma^2$, missä

$$m = \iiint_D \rho(x, y, z) dV$$

on kuution kokonaismassa.

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

Huom. 2: Kurssitentti voi uusia seuraavan tentin yhteydessä, jolloin laskaripisteet otetaan huomioon ja parempi tulos jää voimaan. Myös uusintaan osallistuvien täytyy ilmoittautua tenttiin.