

Ohje: Vastaa lyhyesti ja ytimekkäästi, mutta perustele ratkaisusi. Pelkkä lukuarvo vastauksena ei anna pisteitä. Kokeessa on 4 tehtävää, jokaisesta saa 0–6 pistettä. Kokeen lopussa on standardinormaali-jakauman kertymäfunktion taulukko.

Sallitut välineet: kirjoitusvälineet, laskin (symbolinen ja graafinen OK), enintään A4-kokoinen lunttilappu, jossa kirjoitusta yhdellä puolella.

T1 Herrat A , B ja C ovat metsästävässä ja ampuvat samanaikaisesti kohti samaa hirveä. Heidän todennäköisyytensä osua hirveen ovat 0.1, 0.2 ja 0.3, ja osumiset ovat riippumattomia. Olkoot A , B ja C indikaattorimuuttujat, jotka ilmaisevat, osuiko kyseinen herra hirveen vai ei.

- Luettele satunnaisvektorin (A, B, C) mahdolliset arvot ja niiden todennäköisyydet kolmella desimaalilla (yhdellä, jos käytät prosentteja). **(2p)**
- Olkoon X hirveen osuneiden luotien lukumäärä. Luettele X :n mahdolliset arvot ja niiden todennäköisyydet. **(2p)**
- Jos hirveen osuu tasan yksi luoti, mikä on todennäköisyys, että se on herran C ampuma? **(2p)**

T2 Hehkulampun läpi kulkee sykkivä kolmiomuotoinen virta. Virran jaksonaika on 2 (sekuntia) ja tarkastelemme tapahtumia yhden jakson $[0, 2]$ aikana. Hetkellä t jännite voltteina on

$$u(t) = \begin{cases} 6t & \text{jos } 0 \leq t < 1, \\ 12 - 6t & \text{jos } 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Lampun läpi kulkeva virta ampeereina on $i(t) = u(t)/3$, ja lampun kuluttama teho watteina $p(t) = u(t)i(t)$.

Valitaan satunnainen ajanhetki T jatkuvasta tasajakaumasta välillä $[0, 2]$. Määritellään satunnaismuuttujat $U = u(T)$ ja $P = p(T)$.

- Laske $\mathbb{E}(T)$. **(1p)**
- Laske $\mathbb{E}(U)$. **(2p)**
- Millä välillä ovat P :n mahdolliset arvot? **(1p)**
- Laske $\mathbb{E}(P)$. **(2p)**

Todennäköisyyyslaskennan ja tilastotieteen peruskurssi
MS-A0501, MS-A0502, MS-A0503, MS-A0504
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

Tentti
12.4.2022
J Kohonen

T3 Auton tuulilasiin osuu hyönteisiä satunnaisesti. Ensimmäinen osuu X_1 minuutin kuluttua lähtöhetkestä, ja sen jälkeen osumien väliajat ovat X_2, X_3, \dots minuuttia. Kukin X_i on toisista riippumatta eksponenttijakautunut taaajuusparametrilla $\lambda = 3$ hyönteistä minuutissa, eli tiheysfunktiolla

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

kun $t > 0$. Tiedetään, että tällöin $\mathbb{E}(X_i) = \text{SD}(X_i) = 1/\lambda$.

Herra K ajaa kunnes tuulilasiin on osunut 50 hyönteistä. Aikaa kuluu $S = X_1 + \dots + X_{50}$.

- (a) Laske $\mathbb{E}(S)$ ja $\text{SD}(S)$ kolmella desimaalilla. (2p)
- (b) Laske normaaliapproksimaatiota käyttäen likimääräinen todennäköisyys sille, että aikaa kuluu yli 17 minuuttia. (2p)
- (c) Laske todennäköisyys sille, että ainakin yksi väliajoista X_1, X_2, \dots, X_{50} on yli 1,2 minuuttia. Älä käytä normaaliapproksimaatiota. (2p)

T4 Eri kirjainten suhteelliset esiintyvyydet kolmessa kielessä (englanti, ruotsi, suomi) ovat seuraavan sivun taulukon mukaiset. Oletamme, että tekstissä kukin kirjain arvotaan toisistaan riippumatta kyseisen kielen taulukon mukaisesti, esim. suomenkielisessä tekstissä kukin kirjain on A todennäköisyydellä 0,121.

Eräässä viestikanavassa on 80 % viesteistä englanninkielisiä, 10 % ruotsinkielisiä ja 10 % suomenkielisiä. Kanavalta on napattu yksi satunnainen viesti, ja sen sisältö on: "SALAKKA". Laske viestin kielen posteriorijakauma, toisin sanoen laske todennäköisyydet sille että se on englantia, sille että se on ruotsia, ja sille että se on suomea.

Todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen peruskurssi
MS-A0501, MS-A0502, MS-A0503, MS-A0504
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

Tentti
12.4.2022
J Kohonen

Taulukko tehtävään T4.

kirjain	englanti	ruotsi	suomi
A	0.081	0.094	0.121
B	0.015	0.015	0.003
C	0.028	0.015	0.003
D	0.042	0.048	0.010
E	0.127	0.101	0.080
F	0.021	0.020	0.002
G	0.020	0.030	0.004
H	0.061	0.021	0.019
I	0.070	0.058	0.108
J	0.002	0.006	0.020
K	0.008	0.031	0.050
L	0.040	0.053	0.058
M	0.024	0.035	0.032
N	0.067	0.085	0.088
O	0.075	0.045	0.056
P	0.019	0.018	0.018
Q	0.001	0.000	0.000
R	0.060	0.084	0.029
S	0.063	0.066	0.079
T	0.091	0.077	0.088
U	0.028	0.019	0.050
V	0.010	0.024	0.023
W	0.024	0.001	0.001
X	0.002	0.002	0.000
Y	0.020	0.007	0.017
Z	0.001	0.001	0.001
Å	0.000	0.013	0.000
Ä	0.000	0.018	0.036
Ö	0.000	0.013	0.004