MS-A0202 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2, syksy 2020 — Metsalo/Takala

Tentti, 26.10.2021

Ohjeita:

Tämä tentti on tyyppiä "open book". Voit käyttää apuna kaikkia luento- ja verkkomateriaaleja. Voit käyttää myös matemaattisia ohjelmistoja.
Kurssitenttiin kuuluvat tehtävät 1-5 ja silloin tulee kokonaispisteistä noin 60% kurssitentistä ja noin 40% harjoitustehtävistä. Lopputenttiin kuuluvat kaikki 6 tehtävää ja silloin tulee kokonaispisteistä 100% lopputentistä. Paras näistä kahdesta vaihtoehtoista määrää arvosanan.
Vastaa lyhyesti ja ytimekkäästi, mutta perustele ratkaisusi. Pelkkä lukuarvo vastauksena ei anna pisteitä. Tee ratkaisusi käsin selvästi paperille (tai tablettitietokonella) ja lähetä ratkaisut PDF-muodossa kurssisivulla olevaan palautuslaatikkoon. Huolehdi, että joka sivulla näkyy **kurssikoodi**, **sukunimi**, **etunimi**, **allekirjoitus** ja **päivämäärä**.
Tentin kesto on 4h, mukaan lukien ratkaisujen skannaaminen ja lähettäminen. Kokeeseen liittyvä yhteydenpito muihin ihmisiin ei ole sallittua tämän kokeen aikana.

Tehtävä 1. Olkoon $a > 0$. Sykloidikaaren $x(t) = a(t - \sin t), y(t) = a(1 - \cos t)$; $0 \le t \le 2\pi$ pituus on tunnetusti (?) $8a$. Minne päädymme, jos aloitamme origossa ja kuljemme matkan $2a$ pitkin sykloidikaarta?

Uppgift 1. Låt $a > 0$. Cykloidbågens $x(t) = a(t - \sin t), y(t) = a(1 - \cos t)$; $0 \le t \le 2\pi$ längd är som bekant (?) $8a$. Vart kommer vi, om vi startar i origo och går sträckan $2a$ längs cykloidbågen?

Tehtävä 2. Kahden pinnan sanotaan leikkaavan kohtisuorasti eräässä pisteessä, jos niiden normaalivektorit ovat kohtisuoria siinä pisteessä. Missä pisteissä hyperbolinen paraboloidi (satulapinta) $f(x, y, z) = xy - z = 0$ ja elliptinen paraboloidi $g(x, y, z) = 3y^2 + z^2 - x = 0$ leikkaavat kohtisuorasti?

Uppgift 2. Två ytor säges skära varandra vinkelrätt i en punkt, om deras normalvektorer är vinkelräta i punkten. I vilka punkter skär den hyperboliska paraboloiden (sadelytan) $f(x, y, z) = xy - z = 0$ och den elliptiska paraboloiden $g(x, y, z) = 3y^2 + z^2 - x = 0$ varandra vinkelrätt?

Tehtävä 3. Eräs eksentrinen miljonääri rakennutti elliptisen uima-altaan, jonka reunakäyrä on $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ ja jonka syvyys pisteessä (x, y) on $f(x, y) = 11 - (\frac{x}{2} + x^2 + 2y^2)$ (yksikkö metri kaikkialla). Määritä ne pisteet, joissa altaan syvyys on suurin ja pienin sekä syvyys niissä pisteissä, esim. Lagrangen kertoimia käyttäen.

Uppgift 3. En excentrisk miljonär lät bygga en elliptisk simbassäng, vars randkurva ges av $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ och som i punkten (x, y) har djupet $f(x, y) = 11 - (\frac{x}{2} + x^2 + 2y^2)$ (enheten meter överallt). Bestäm de punkter, där djupet i bassängen är störst resp. minst samt djupet i dessa punkter, t.ex. genom att använda Lagrange-multiplikatorer.

Tehtävä 4. Jos kappale pudotetaan tyhjiössä korkeudelta y_0 lattian yläpuolella, sen kiihtyvyys on $y''(t) = -g$, joten sen nopeus on $y'(t) = -gt$ ja sen korkeus $y(t) = -gt^2/2 + y_0$ hetkellä t pudottamisen jälkeen, joten se iskee lattiaan hetkellä $t_1 = \sqrt{2y_0/g}$.
Yritämme mitata g:n pudottamalla kappaleen tyhjiössä. Mittaukset antoivat että y_0 oli $5.00 \pm 0.02m$ ja aikaa t_1 maahan osumiseen $1.00 \pm 0.01s$. Käytä lineaariapproksimaatiota saadaksesi *approksimatiivinen* yläraja g:n epätarkkuudelle, jonka y_0:n ja t_1:n epätarkkuudet aiheuttavat.

Uppgift 4. Om ett föremål släpps i vacuum från höjden y_0 ovan golvet, utsätts den för accelerationen $y''(t) = -g$, så dess hastighet ges av $y'(t) = -gt$ och dess höjd av $y(t) = -gt^2/2 + y_0$ vid tiden t efter att den släppts, så den slår i golvet vid tiden $t_1 = \sqrt{2y_0/g}$.
Vi försöker mäta g genom att släppa ett föremål i vacuum. Mätningar gav att y_0 var $5.00 \pm 0.02m$ och tiden t_1 tills föremålet slog i marken $1.00 \pm 0.01s$. Använd linjär approximering för att bestämma en *approximativ* övre gräns för osäkerheten i g, som osäkerheterna i y_0 och t_1 ger upphov till.

Tehtävä 5. Laske kappaleen $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x, y \ge 0\}$ (joten W on neljäsosa yksikköpalloa) massa m, kun sen tiheys pisteessä $(x, y, z) \in W$ on $\delta(x, y, z) = xy$.

Uppgift 5. Bestäm massan m hos kroppen $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x, y \ge 0\}$ (W är alltså en fjärdedel av enhetsklotet), om densiteten i punkten $(x, y, z) \in W$ ges av $\delta(x, y, z) = xy$.

Tehtävä 6. Laske tasointegraali $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+(x+2y)^2+(x-y)^2)^2}$.
(Aloita vaikkapa ottamalla käyttöön uudet parametrit $u(x, y) = x + 2y$ ja $v(x, y) = x - y$.)

Uppgift 6. Beräkna dubbelintegralen $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+(x+2y)^2+(x-y)^2)^2}$.
(Börja t.ex. genom att införa nya parametrar $u(x, y) = x + 2y$ och $v(x, y) = x - y$.)