MS-C1420 Fourier-analyysi (Aalto-yliopisto) Turunen / Puska
17.10.2022, 13:00–16:00

Pisteitä myös hyvästä yrityksestä! **Laskimet ja kirjallisuus kielletty.**

Tällä kertaa saat olettaa tunnetuksi Fourier-käänteismuunnoksen kaavan.

---

1. Määritellään Schwartz-testifunktioille s muunnos $Ms : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ kaavalla
$$Ms(\alpha) := \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\cdot\alpha}\,\mathrm{d}t.$$
Näytä, että $Ms(\alpha) = \widehat{s}(\lambda\alpha)$ eräällä vakiolla λ. Laske λ. Näytä myös, että $M(Ms)(t) = \mu\, s(-t)$ eräällä vakiolla μ. Laske μ.

2. Laske signaalin $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ energia, kun $s(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cdot\nu}\,\mathrm{e}^{-|\nu|}\,\mathrm{d}\nu$.
(Vihje: energia säilyy Fourier-integraalimuunnoksessa).

3. Etsi Fourier-kertoimet $\widehat{s}(\nu)$, kun $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, missä $s(t) = (\sin(2\pi t))^2$.
(Vihje: Euler-kaava $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$ voi auttaa).

4. Etsi kaikki jatkuvat 1-periodiset analogiset signaalit $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ joille pätee $s * s = s$ ja $s(0) = 1$.
(Vihje: Miten konvoluutio Fourier-muuntuu? Kirjoita $s(t)$ Fourier-sarjana tapauksessa $t = 0$...)

5. Tarkastellaan sileitä 1-periodisia signaaleja $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, joille $\widehat{s}(0) = 0$.
Näytä, että silloin $\|s\| \leq \|s'\|/(2\pi)$.
(Vihje: Derivoi Fourier-sarjaa. Energia säilyy Fourier-kerroinmuunnoksessa.)

6. Olkoon signaali siniaalto taajuudella 500 Hz. Miksi signaalinkäsittelyssä ei riitä, että siitä otetaan tasavälisesti 1000 näytettä sekunnissa?
(Piirrä tilanteesta myös kuva!)

7. Tarkastellaan 2-periodisia digitaalisia signaaleja $s : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Etsi luvut $a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{C}$ siten että
$$\begin{bmatrix}\widehat{s}(0)\\ \widehat{s}(1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s(0)\\ s(1)\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}s(0)\\ s(1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widehat{s}(0)\\ \widehat{s}(1)\end{bmatrix}.$$
(Vihje: Kirjoita aluksi DFT:n ja käänteis-DFT:n määritelmät.)

Tehtävät 8–10 paperin toisella puolen!

8. Tietokoneella kertolaskut ovat olennaisesti hitaampia kuin yhteenlaskut. Perustele, miksi N-periodisen digitaalisen signaalin s Fourier-muunnoksen $\widehat{s}$ (DFT) laskennan työläys on "enintään vakio kertaa N^2".

9. Oletetaan edellisen tehtävän tapauksessa, että $N = 2^k$ eli $N \in \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \cdots\}$. Miksi DFT:n työläys on "enintään vakio kertaa $N \log_2(N)$" nopean Fourier-muunnoksen eli FFT-algoritmin avulla?
Vihje:

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=1}^{N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t \cdot \nu/N} s(t) \\
=\ & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu/N} \sum_{k=1}^{N/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k \cdot \nu/(N/2)} s(2k-1) + \sum_{k=1}^{N/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k \cdot \nu/(N/2)} s(2k).
\end{aligned}$$

10. Etsi $a(t, \nu)$ siten, että

$$t^3 s''(t) = \int_{\mathbb{R}} a(t,\nu)\, \widehat{s}(\nu)\, \mathrm{d}\nu$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$ jokaiselle Schwartz-testifunktiolle $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
(Vihje: derivoi kahdesti Fourier-käänteismuunnosta $s(t) = \cdots$.)

Tehtävät 1–7 paperin toisella puolen!