[MS-C1420] [Fourier Analyysi] tenttipruju, ei viralliset, itse tehdyt eli voi olla virheitä

-

16.10.2023

1. (Muistutus: $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$, koko tentti muistutus, ei vain kysymys 1)

   (a) Olkoon $f = \hat{q}$, missä $q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on "riittävän mukava". Näytä, että

$$\hat{f}(\nu) = q(-\nu) \quad \text{kaikilla } \nu \in \mathbb{R}.$$

Ratkaisu:
$\hat{\hat{q}}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itv}\hat{q}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi it(-v)}\hat{q}(t)dt = q(-v)$ Vika askel on fourier-käänteismuunnos

   (b) Olkoon $r(t) := e^{-2\pi|t|}$, kun $t \in \mathbb{R}$. Näytä, että

$$\hat{r}(\nu) = \frac{1/\pi}{1+\nu^2}.$$

Ratkaisu:
$\hat{r}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itv}r(t)dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-2\pi itv}e^{2\pi t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2\pi itv}e^{-2\pi t}dt$

$= \frac{1}{2\pi-2\pi iv} + \frac{1}{2\pi+2\pi iv} = \frac{1/\pi}{1+v^2}$

   (c)

$$s(t) := e^{-2\pi|t|} + \frac{1/\pi}{1+t^2}, \quad \text{kun } t \in \mathbb{R}.$$

Näytä, että $\hat{s} = s$.

Ratkaisu:
Käytetään a ja b osaa.

$$\hat{s}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|t|} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1/\pi}{1+t^2}$$

$$= \frac{1/\pi}{1+t^2} + \hat{\hat{r}} = \frac{1/\pi}{1+t^2} + r(-t) = \frac{1/\pi}{1+t^2} + e^{-2\pi|-t|}$$

2. (a) Tarkastellaan reaalimuuttujan funktiota q, missä $q(t) = \sin(2\pi t)^3$. Näytä, että

$$q(t-1) = q(t).$$

Laske perustellen 1-periodisen analogisen signaalin $q : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ Fourier-kerroin $\hat{q}(0)$.
(Vihje: mieti integroidessassi funktion negatiivisia ja positiivsia arvoja)

Ratkaisu:
Todistetaan 1-periodisuus

$$q(t-1) = \sin(2\pi(t-1))^3 = \sin(2\pi t - 2\pi)^3 = \sin(2\pi t)^3 = q(t)$$

$\hat{q}(0) = \int_{-0.5}^{0.5} e^{-2\pi i t 0} q(t) dt = \int_{-0.5}^{0.5} \sin(2\pi t)^3 dt$, koska $\sin^3$ on pariton integraalista tulee nolla. (Huom. Rajat voisivat olla 0 -> 1, mutta niitä saa siirtää vakiolla.)

(b) (b) Olkoon $r(t) = \frac{1+\sin(2\pi t)}{2+\cos(2\pi t)}$, kun $t \in \mathbb{R}$. Paljonko on 1-periodisen analogisen signaalin r Fourier-kertoimien summa $\sum_{v \in \mathbb{Z}} \hat{r}(v)$?
(Vihje: Älä laske Fourier-kertoimia, vaan ajattele Fourier-sarjoja yleisesti!)

Ratkaisu:
Huomattan että, $r(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{r}(v) e^{-2\pi i t v}$ ja kun $t = 0$

$$r(0) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{r}(v)$$

Eli fourier kertoimet ovat vain $r(0) = \frac{1}{3}$

(c) Olkoon $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Näytä, että

$$\left| \int_0^1 s(t)\, dt \right|^2 \leq \int_0^1 |s(t)|^2 \, dt.$$

(Vihje: Energian säilyminen voi auttaa. Toki muitakin ratkaisutapoja on, esimerkiksi Cauchy-Schwarz- tai Hölder-epäyhtälö.)

Ratkaisu:
kun $v = 0$

$$\left| \int_0^1 s(t)\, dt \right|^2 = \left| \int_0^1 s(t) e^{-2\pi i t v}\, dt \right|^2 = |\hat{s}(0)|^2$$

$$|\hat{s}(0)|^2 \leq \sum_{v=-\infty}^{\infty} |\hat{s}(v)|^2 = \int_0^1 |s(t)|^2 dt$$

Vika askel saadan energian säilymisen kautta.

3. Olkoot $r, s : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ signaaleja, joille

$$\sum_{t \in \mathbb{Z}} |r(t)| < \infty \quad \text{ja} \quad \sum_{t \in \mathbb{Z}} |s(t)| < \infty.$$

(a) Mikä on nyt signaalin s Fourier-muunnoksen kaava? Entä mikä on vastaavan Fourier-käänteismuunnoksen kaava? Entä signaalien $r * s$ konvoluution kaava?

Ratkaisu:
Fourier-muunnos:

$$\hat{s}(v) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} s(t) e^{-2\pi i t v}$$

Fourier-käänteismuunnos:

$$s(t) = \int_0^1 e^{-2\pi i t v} \hat{s}(v) dv$$

Konvoluutio:

$$r(t) * s(t) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} s(\lambda) r(t - \lambda)$$

(b) Näytä sisätulon säilyminen $\langle r, s \rangle = \langle \hat{r}, \hat{s} \rangle$, missä $\hat{r}, \hat{s} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ovat vastaavat diskreetin ajan Fourier-muunnokset (DTFT).

Ratkaisu:
Huom Chatin tekemä.

$$\langle r, s \rangle = \sum_{t \in \mathbb{Z}} r(t) \overline{s(t)}$$

Substitute the inverse Fourier transforms of $r(t)$ and $s(t)$:

$$r(t) = \int_0^1 \hat{r}(f) e^{i2\pi f t} \, df, \quad s(t) = \int_0^1 \hat{s}(f) e^{i2\pi f t} \, df$$

This gives:

$$\langle r, s \rangle = \sum_{t \in \mathbb{Z}} \left(\int_0^1 \hat{r}(f) e^{i2\pi f t} \, df \right) \left(\int_0^1 \overline{\hat{s}(g)} e^{-i2\pi g t} \, dg \right)$$

Using Fubini's theorem to interchange the sum and integrals, we get:

$$\langle r, s \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \hat{r}(f) \overline{\hat{s}(g)} \left(\sum_{t \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi t (f-g)} \right) df \, dg$$

Since $\sum_{t\in\mathbb{Z}} e^{i2\pi t(f-g)} = \delta(f-g)$, the expression simplifies to:

$$\langle r, s\rangle = \int_0^1 \hat{r}(f)\overline{\hat{s}(f)}\, df = \langle \hat{r}, \hat{s}\rangle$$

Thus, the inner product is preserved under the Fourier transform.

4. (a) Miten määritellään 12-periodisen signaalin diskreetti Fourier-muunnos? Millainen on tällöin diskreetin Fourier-käänteismuunnoksen kaava?

Ratkaisu:

$$\hat{s}(v) = \sum_{t=1}^{12} e^{-i2\pi v \frac{t}{12}} s(t)$$

$$s(t) = \frac{1}{12} \sum_{t=1}^{12} e^{i2\pi v \frac{t}{12}} \hat{s}(v)$$

(b) Miten määritellään 12-periodisen digitaalisen signaalin *energia*? Miten määritellään 12-periodisten digitaalisten signaalien *konvoluutio*?

Ratkaisu:

signaalin energia

$$\sum_{t=1}^{12} |s(t)|^2$$

signaalin knvoluutio

$$\sum_{\lambda=1}^{12} s(\lambda) r(t-\lambda)$$

(c) Olkoon $s(t) := \sin(\pi t/6)$, kun $t \in \mathbb{Z}$. Laske signaalin $s : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ diskreetti Fourier-muunnos.

Ratkaisu:

Manuaalista laskentaa $\sin(\pi \frac{t}{6})$ arvot kun $t : 1- > 12$

$$\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0$$

eli

$$\hat{s}(v) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{2\pi i \cdot v \cdot 1}{12}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{2\pi i \cdot v \cdot 2}{12}} + 1 \cdot e^{-\frac{2\pi i \cdot v \cdot 3}{12}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{2\pi i \cdot v \cdot 4}{12}} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{2\pi i \cdot v \cdot 6}{12}} + -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{2\pi i \cdot v \cdot 8}{12}}$$

jatkuu

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{2\pi i \cdot v \cdot 9}{12}} + -1 \cdot e^{-\frac{2\pi i \cdot v \cdot 10}{12}} + -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{2\pi i \cdot v \cdot 11}{12}} + -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{2\pi i \cdot v \cdot 12}{12}}$$