Todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen peruskurssi MS-A0501 Tentti
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos 17.10.2022
Aalto-yliopisto G Metsalo/A Avela

Ohje: Vastaa lyhyesti ja ytimekkäästi, mutta perustele ratkaisusi. Pelkkä lukuarvo vastauksena ei anna pisteitä. Merkitse jokaiseen vastauspaperiin:

- Kurssin nimi ja koodi
- SUKUNIMI, ETUNIMET ja OPISKELIJANUMERO (tikkukirjaimin)
- Koulutusohjelma ja vuosikurssi
- Päivämäärä ja nimikirjoitus

Sallitut välineet: Laskin (symbolinen ja graafinen OK), enintään A4-kokoinen muistilappu (käsin kirjoitettu, tekstiä vain toisella puolella, oikeassa yläkulmassa oma nimi, ei tarvitse palauttaa)

---

1. Arvioidaan, että eräässä populaatiossa 1%:lla on harvinainen tauti. Kyseisen taudin toteamiseksi on kehitetty testi, joka ei kuitenkaan ole täysin luotettava. Jos henkilöllä on tauti, testi antaa tautiin viittaavan tuloksen todennäköisyydellä 0.95. Jos henkilöllä ei ole tautia, testi antaa tautiin viittaavan tuloksen todennäköisyydellä 0.06.
   a) Mikä on todennäköisyys että väestöstä satunnaisesti poimittu henkilö saa tautiin viittaavan tuloksen? (3p.)
   b) Mikä on todennäköisyys että tietyllä henkilöllä on tauti, jos testi antaa tautiin viittaavan tuloksen? (3p.)

2. Jatkuva satunnaismuuttuja T noudattaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{3}{4} \cdot t^2(2-t), & \text{kun } 0 \leq t \leq 2, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

   a) Laske T:n odotusarvo $\mu_T = \mathbb{E}(T)$ (1p.) ja keskihajonta $\sigma_T = \sqrt{Var(T)}$ (2p.).
   b) Jatkuva satunnaismuuttuja $U = T_1 + T_2 + \ldots + T_{100}$, missä satunnaismuuttujat T_i ovat riippumattomat ja noudattavat T:n jakaumaa.
   Approksimoi $\mathbb{P}(U \in [115, 130])$ käyttämällä normaaliapproksimaatiota. (3p.)

3. Diskreetti satunnaismuuttuja X, jonka perusjoukko on $S_X = \{0,\ 1,\ 2, \ldots\}$ ja tiheysfunktio $f_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$, kun $k \in S_X$, missä $\lambda > 0$, sanotaan *Poisson*-jakautuneeksi parametrilla λ. Tätä merkitään $X \sim Po(\lambda)$.
   Johda kaava λ:n suurimman uskottavuuden estimaatille λ^*_{ML}, joka saadaan satunnaismuuttujan X riippumattomasta otoksesta $\bar{x} = \{x_1,\ x_2, \ldots, x_n\}$. (6p.)

4. Teemu Teekkari tutki erästä Poisson-jakautunutta satunnaismuuttujaa $X \sim Po(\theta)$, missä tuntematon parametri $\theta > 0$. Hän ajatteli θ:n arvon olevan eräs jatkuva satunnaismuuttuja Θ, jonka perusjoukko $S_\Theta =]0, \infty[$ ja jonka priori-jakaumaksi hän arvioi

$$p_0(\theta) = \begin{cases} 2e^{-2\theta} & , \theta \in S_\Theta, \\ 0 & , \theta \notin S_\Theta. \end{cases}$$

   Hän päätti ottaa otoksen $\bar{X} = \{X_1,\ X_2, \ldots, X_n\}$, laskea sen perusteella posteriori-jakauman $p_1(\theta|\bar{X})$ ja käyttää θ:n estimaattina posteriori-jakauman moodia, eli sellaista parametrin θ:n arvoa $\theta_M(\bar{X})$, jossa posteriori-jakauman tiheysfunktio $p_1(\theta|\bar{X})$ saavuttaa suurimman arvonsa.
   Johda kaava tälle estimaatille $\theta_M(\bar{x})$, joka saadaan otoksesta $\bar{x} = \{x_1,\ x_2, \ldots, x_n\}$. (6p.)
   (Huom: Jos $g(t)$ on positiivinen funktio ja $c > 0$ on vakio, niin $g(t)$ ja $c \cdot g(t)$ saavuttavat suurimman arvonsa samassa pisteessä.)

Tehtäväpaperin toisella puoleella on standardinormaalijakauman kertymäfunktion taulukko.

Normaalijakauman taulukko

Allaolevaan taulukkoon on koottu lukuarvoja normitetun normaalijakauman kertymäfunktiolle

$$F_Z(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt.$$

x	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999