**ELEC-A3110 Mekaniikka, syksy 22** **Välikoe 2, malliratkaisut**

opettaja: Matti Raasakka

## Tehtävä 1

Valitse oikeat väitteet. (Kirjoita niitä vastaavat kirjaimet konseptipaperille.) Oikeasta väitteestä +3p, väärästä valinnasta −3p. (Kokonaispisteet kuitenkin minimissään 0.)

A) Kaikki voimat johtuvat pohjimmiltaan luonnon neljästä perusvuorovaikutuksesta.
B) Newtonin kolmas liikelaki sanoo, että jos yksi kappale vaikuttaa toiseen jollain voimalla, niin silloin toinen kappale vaikuttaa ensimmäiseen samalla voimalla.
C) Kappaleen paino on kappaleen sisäinen ominaisuus, eli se ei riipu muista kappaleista.
D) Liikettä hidastavat voimat voivat riippua kappaleen muodosta ja sen nopeudesta.
E) Energiaa ei koskaan tuhoudu, vaan se vain muuttaa muotoaan.
F) Tasapainoaseman läheisyydessä voimat pyrkivät siirtämään systeemin tasapainoasemaa kohti.
G) Systeemin kokonaisliikemäärä säilyy, jos ulkoisten voimien summa on vakio.
H) Mekaaninen energia ei säily epäelastisessa törmäyksessä.
I) Kappaletta käännettäessä pyörähdysten järjestyksellä ei ole väliä.
J) Jos kappaleen koko kaksinkertaistetaan, niin sen hitausmomentti nelinkertaistuu.

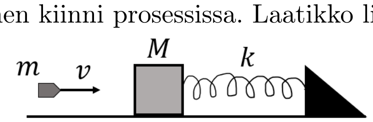
**Malliratkaisu:**

Oikeat väitteet: A, D, E, H, J. (+3p per oikea vastaus, −3p per väärä vastaus)

Väite B on väärin, koska voiman vastavoima on yhtä suuri mutta *vastakkaissuuntainen*. Väite C on väärin, koska paino riippuu kappaleeseen kohdistuvasta painovoimasta. Väite F on väärin, koska *epävakaiden* tasapainoasemien ympärillä voimat pyrkivät siirtämään systeemiä pois päin tasapainoasemasta. Väite G on väärin, koska kokonaisliikemäärän säilymiseen vaaditaan, että ulkoisten voimien summa on *nolla*. Väite I on väärin, koska pyörähdysten järjestyksellä on väliä, jos ne tapahtuvat eri akselien suhteen.

## Tehtävä 2

Tasolle on alla olevan kuvan mukaisesti asetettu laatikko (massa $M$), joka on toisesta laidastaan kiinnitetty jouseen (jousivakio $k$). Toisesta päästään jousi on kiinnitetty tukevasti paikoilleen. Aluksi laatikko on levossa tasapainoasemassaan, kunnes laatikkoon ammutaan luoti (massa $m$) nopeudella $v$. Luoti uppoaa laatikkoon ja jää siihen kiinni prosessissa. Laatikko liukuu tasolla kitkatta.




a) Selvitä laatikon nopeus heti luodin osumisen jälkeen. (5p)
b) Kuinka suuri osa luodin energiasta dissipoituu törmäyksessä? (5p)
c) Kuinka kauas tasapainoasemastaan jousi poikkeaa enimmillään? (5p)

**Malliratkaisu:**

a) Törmäyksessä kokonaisliikemäärä säilyy, sillä ulkoiset voimat (painovoima ja tason normaalivoima) kumoavat toisensa törmäyshetkellä. (1p) Valitaan positiivinen liikesuunta kuvassa oikealle päin. Liikemäärä ennen törmäystä on $p_1 = mv$. (1p) Merkitään laatikon nopeutta heti törmäyksen jälkeen $u$:lla. Laatikon massa törmäyksen jälkeen on $M + m$, sillä luoti uppoaa laatikkoon. Heti törmäyksen jälkeen liikemäärä on siis $(M + m)u$. (1p) Liikemäärän säilymisestä saadaan ratkaistua laatikon nopeudelle

$$mv = (M+m)u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{m}{M+m}v\,. \quad \text{(2p)}$$

b) Luodin ja laatikon potentiaalienergiat pysyvät samoina prosessissa, sillä niiden korkeudet eivät muutu, joten voidaan tarkastella pelkästään liike-energioita. (1p) Luodin liike-energia ennen törmäystä

$K_1 = \frac{1}{2}mv^2$. (1p) Laatikon liike-energia törmäyksen jälkeen

$$K_2 = \frac{1}{2}(M+m)u^2 = \frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{m}{M+m}v\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{M+m}v^2 . \quad \text{(1p)}$$

Liike-energian absoluuttiselle muutokselle saadaan

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{M+m}v^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2-(M+m)m}{M+m}v^2 = -\frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}v^2 , \quad \text{(1p)}$$

joka on negatiivinen, koska energia pienenee. Energiasta häviää törmäyksessä siis suhteellisesti

$$\frac{-\Delta K}{K_1} = \frac{M}{M+m}$$

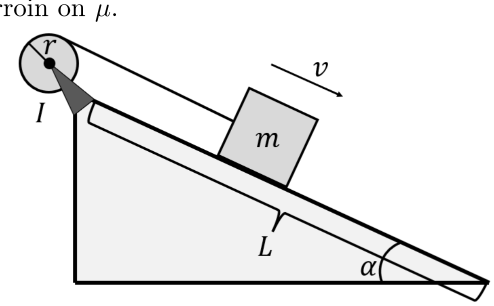
osa alkuperäisestä energiasta. (1p)

c) Koska systeemissä ei ole epäkonservatiivisia voimia, niin mekaaninen kokonaisenergia säilyy laatikon liukuessa tasolla. (1p) Laatikon liukuessa, laatikon liike-energia muuntuu jousen potentiaalienergiaksi $U_k(x) = \frac{1}{2}kx^2$, missä $x$ on jousen poikkeama tasapainoasemasta. (1p) Ääriasennossa laatikko on hetkellisesti pysähdyksissä, ja kaikki liike-energia on muuntunut jousen potentiaalienergiaksi. (1p) Jousen maksimipoikkeamalle $x_{max}$ saadaan siis muodostettua yhtälö

$$\begin{aligned} K_2 &= U_k(x_{max}) \qquad \text{(1p)} \\ \frac{1}{2}(M+m)u^2 &= \frac{1}{2}kx_{max}^2 \\ x_{max} &= \sqrt{\frac{M+m}{k}}u = \sqrt{\frac{M+m}{k}}\frac{m}{M+m}v = \sqrt{\frac{m^2}{k(M+m)}}v . \quad \text{(1p)} \end{aligned}$$

## Tehtävä 3

Laatikko (massa $m$) liukuu painovoiman (putoamiskiihtyvyys $g$) vaikutuksesta alas ramppia alla olevan kuvan mukaisesti. Laatikko lähtee levosta liikkeelle rampin yläpäästä. Laatikko on kiinnitetty naruun, joka on kierretty toisesta päästään väkipyörän (säde $r$, hitausmomentti $I$) ympärille. Väkipyörä pyörii kitkatta akselinsa ympäri. Lähes massaton ja venymätön naru purkautuu väkipyörän ympäriltä lipsumatta, kun laatikko liukuu alas ramppia. Rampin pituus on $L$ ja kulma vaakatasoon nähden $\alpha$. Laatikon ja rampin välinen liukukitkakerroin on $\mu$.



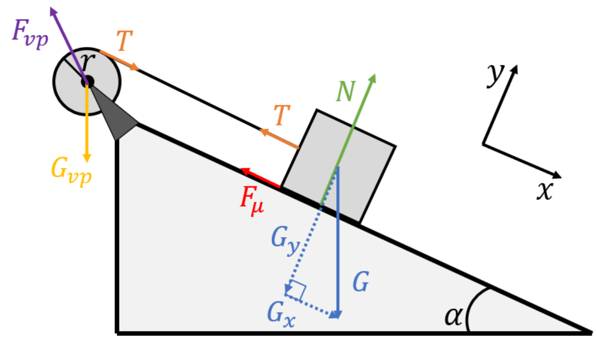

a) Selvitä laatikon kiihtyvyys. (5p)
b) Mikä on laatikon nopeus rampin alapäässä? (5p)
c) Selvitä suurin liukukitkakertoimen arvo, jolla laatikko liukuu ramppia alas. Riippuuko se väkipyörän ominaisuuksista? Perustele. (5p)

**Malliratkaisu:**

a) Alla olevaan kuvaan on merkitty väkipyörään ja laatikkoon vaikuttavat voimat. Voimat ovat (0,33p per voima):

- Laatikon paino $G$.
- Rampin laatikkoon kohdistama normaalivoima $N$.

- Rampin ja laatikon välinen liikekitka $F_\mu$.
- Narun tukivoima $T$. Naru on venymätön, joten se välittää voiman häviöttä päiden välillä. Tästä syystä tukivoima on yhtä suuri narun molemmissa päissä.
- Väkipyörän paino $G_{vp}$.
- Akselin väkipyörään kohdistama tukivoima $F_{vp}$.




Väkipyörä pyörii paikallaan, joten siihen kohdistuva kokonaisvoima on välttämättä 0. Tarvitsee siis tarkastella vain väkipyörän pyörimisliikettä, jonka aiheuttaa yksinomaan voima $T$. Kirjoitetaan liikeyhtälöt laatikon ja väkipyörän liikkeelle.

Liikeyhtälöt laatikon suoraviivaiselle liikkeelle:

$$\begin{aligned} x\text{-suunta:}\quad & ma = G_x - F_\mu - T\,, \quad (0{,}5\text{p}) \\ y\text{-suunta:}\quad & 0 = N - G_y \quad (0{,}5\text{p})\,. \end{aligned}$$

Liikeyhtälö väkipyörän pyörimisliikkeelle:

$$I\alpha = Tr \quad (0{,}5\text{p})\,.$$

Koska naru purkautuu väkipyörän ympäriltä lipsumatta, niin laatikon kiihtyvyyden $a$ ja väkipyörän kulmakiihtyvyyden $\alpha$ välillä täytyy päteä yhteys $a = r\alpha$, jotta väkipyörän pinnan pisteiden kiihtyvyys on yhtä suuri kuin narun kiihtyvyys. (0,5p)

Laatikon $y$-suuntaisesta liikeyhtälöstä saadaan ratkaistua $N = G_y = mg\cos\alpha$, joten liikekitkalle saadaan lauseke $F_\mu = \mu N = \mu mg\cos\alpha$. Väkipyörän liikeyhtälöstä saadaan $T = I\alpha/r = Ia/r^2$. Sijoitetaan nämä laatikon $x$-suuntaiseen liikeyhtälöön, mistä saadaan ratkaistua laatikon kiihtyvyys $a$:

$$\begin{aligned} ma &= mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - \frac{Ia}{r^2} \\ \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right) a &= (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) g \\ a &= \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{1 + \frac{I}{mr^2}} g \quad (1\text{p})\,. \end{aligned}$$

b) Laatikon nopeus voidaan ratkaista esimerkiksi käyttämällä a)-kohdan tulosta laatikon vakiokiihtyvyydestä, tai sitten energia tarkasteluilla. Seuraavassa tehtävä ratkaistaan energiatarkasteluiden avulla.

Aluksi systeemi on paikallaan, joten systeemissä on pelkästään laatikon painovoiman potentiaalienergiaa, $U_g = mgL\sin\alpha$. (0,5p) Lopussa systeemissä on laatikon ja väkipyörän liike-energiaa. Laatikon liike-energia: $K_l = \frac{1}{2}mv^2$, missä $v$ on laatikon nopeus. (0,5p) Väkipyörän liike-energia: $K_{vp} = \frac{1}{2}I\omega^2$, missä $\omega$ on väkipyörän kulmanopeus. (0,5p) Narun lipsumattomuusehdosta saadaan yhteys $v = r\omega$ laatikon nopeuden ja väkipyörän kulmanopeuden välille (0,5p), joten $K_{vp} = \frac{1}{2}Iv^2/r^2$. Mekaanisesta energiasta häviää laatikon liukuessa kitkavoiman tekemän työn verran (1p), $W_\mu = F_\mu L = \mu NL = mgL\cos\alpha$. Mekaanisen energian säilymisestä, miinus kitkavoiman tekemä työ, saadaan siis yhtälö

$$
\begin{aligned}
U_g - W_\mu &= K_l + K_{vp} \quad \text{(1p)} \\
mgL\sin\alpha - mgL\cos\alpha &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{r^2} \\
(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)gL &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)v^2 \\
v &= \sqrt{\frac{2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)gL}{1 + \frac{I}{mr^2}}}. \quad \text{(1p)}
\end{aligned}
$$

c) Sekä a)- että b)-kohdan vastauksista nähdään, että laatikon kiihtyvyys/nopeus on nollaa suurempi vain, kun $\sin\alpha > \mu\cos\alpha$. Tästä saadaan johdettua liukukitkakertoimelle ehto $\mu < \sin\alpha/\cos\alpha = \tan\alpha$. (2p) Ehto riippuu vain rampin kallistuskulmasta $\alpha$, eikä lainkaan väkipyörän ominaisuuksista. (1p) Väkipyörän hitausmomentti hidastaa kyllä laatikon liikettä silloin, kun laatikko on liikkeessä, kuten yllä olevista kaavoista nähdään, mutta se ei vaikuta kitkakertoimen raja-arvoon . (1p) Kun kitkakerroin saavuttaa raja-arvonsa, niin laatikolla ei ole kiihtyvyyttä, jolloin väkipyöräkin pyörii kitkatta tasaisella kulmanopeudella, eikä siten vastusta laatikon liikettä mitenkään. (1p)

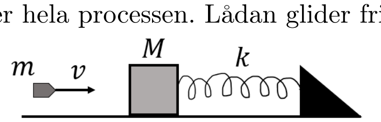
## Uppgift 1

Välj rätt påståenden. (Skriv ner motsvarande bokstav på konceptpappret.) För rätt påstående +3p, för fel val −3p. (De totala poängen dock minst 0.)

A) Alla krafter härleds i grunden från de fyra fundamentala krafterna (grundkrafterna).
B) Newtons tredje rörelselag påstår att ifall en kropp påverkar en annan kropp med en kraft så påverkar även den andra kroppen den första med samma kraft.
C) En kropps tyngd är den kroppens inre egenskap, det vill säga den påverkas inte av andra kroppar.
D) Krafter som bromsar in en kropp kan bero av kroppens form samt kroppens hastighet.
E) Energi förstörs aldrig, den byter endast form.
F) I jämviktslägets närhet försöker krafterna flytta systemet mot jämviktsläget.
G) Ett systems totala rörelsemängd bevaras ifall de yttre krafternas summa är konstant.
H) Den mekaniska energin bevaras inte i en oelastisk kollision.
I) Då man beskriver en kropps rotation har rotationernas ordning ingen skillnad.
J) Om en kropps storlek fördubblas, fyrdubblas dess tröghetsmoment.

## Uppgift 2

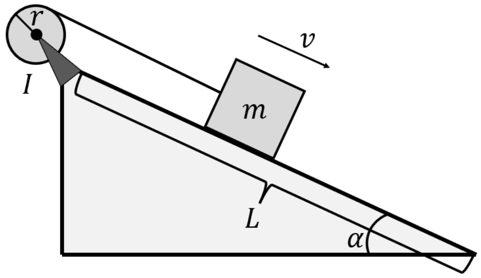
På ett plan är, enligt bilden nedan, en låda (massa $M$) placerad. I lådans ena ända finns en fjäder fastsatt (fjäderkonstant $k$). Fjäderns andra ända är fastsatt så att den inte rör på sig. I början är lådan i vila i sitt jämnviktsläge. Sedan skjuts lådan med en kula (massa $m$) vars hastighet är $v$. Kulan fastnar i lådan och stannar där under hela processen. Lådan glider friktionsfritt på underlaget.




a) Beräkna lådans hastighet direkt efter kollisionen. (5p)
b) En hur stor del av kulans energi skingras i kollisionen? (5p)
c) Hur långt ifrån sitt jämnviktsläge avviker fjädern som mest? (5p)

## Uppgift 3

En låda (massa $m$) glider under påverkan av gravitationen (tyngdacceleration $g$) ner för en ramp (enligt bilden nedan). Lådan startar från vila vid rampens övre kant. I lådan är fäst ett rep som i andra ändan är snurrat runt ett block (radie $r$, tröghetsmoment $I$). Blocket snurrar friktionsfritt runt sin axel. Det nästan masslösa repet (som inte töjs ut) frigörs från blocket utan att glida då lådan glider ner längs med planet. Rampens längd är $L$ och vinkeln i förhållande till det vågräta planet är $\alpha$. Friktionskoefficienten mellan lådan och planet är $\mu$.




a) Beräkna lådans acceleration. (5p)
b) Vad är lådans hastighet i slutet av rampen? (5p)
c) Bestäm det största värdet på friktionskoefficienten så att lådan ändå glider ner för rampen. Beror det av blockets egenskaper? Motivera. (5p)