Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Alestalo/Vesanen

MS-A0305 Differentiaali- ja integraalilaskenta 3

Kurssitentti ja yleinen tentti 25.10.2018 klo 9.00–12.00.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.
Jokainen kurssille osallistunut voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää".

1. Satunnaismuuttujan X arvo on origokeskisen R-säteisen pallon $B(R)$ sisältä satunnaisesti valitun (ts. tiheysfunktio = vakio = $1/V$) pisteen etäisyys pallon pinnasta. Laske sen odotusarvo
$$EX = \frac{1}{V}\iiint_{B(R)} \left(1 - \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) dV.$$

2. Olkoon $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$, kun $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$. Laske vektorikentän $\mathbf{F}$ viivaintegraali
$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$$
origosta pisteeseen $(1,2,3)$ pitkin käyrää C, jolla on parametrisointi $\mathbf{r}(t) = (t, 2t, 3t)$, $0 \le t \le 1$,
a) potentiaalin avulla;
b) suoraan parametrisointia käyttämällä.

3. Laske Greenin kaavan avulla viivaintegraali
$$\oint_C (x - y^3)\,dx + (y^3 + x^3)\,dy,$$
kun käyrä C on puoliympyrän
$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$$
reuna "vastapäivään" kierrettynä.

4. Määritä satulapinnan $z = xy$ sen osan pinta-ala, jolle $x^2 + y^2 \le 9$.

5. a) Laske vektorikentän $\mathbf{F}(x,y,z) = xz\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - zy\mathbf{k}$ lähteisyys (eli divergenssi) ja pyörteisyys (eli roottori) pisteessä $(1,2,3)$.
b) Oletetaan, että kolmiulotteisella vektorikentällä $\mathbf{F}$ on vektoripotentiaali $\mathbf{A}$, jolle $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{F}$. Osoita, että vektorikentällä $\mathbf{F}$ on sellainen vektoripotentiaali $\mathbf{B}$, jolle $B_1 = 0$.
Vihje: $\nabla \times (\nabla f) = \overline{0}$.

Käännä!

6. a) Tarkastellaan 3-ulotteista radiaalista vektorikenttää

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r,$$

jossa $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Osoita, ettei vektorikentän $\mathbf{F}$ vuo R-säteisestä origokeskisestä pallosta ulospäin riipu pallon säteestä R.

b) Osoita, että vuo on sama myös kaikille origon sisältäville ellipsoideille. Vihje: Sovella Gaussin lausetta "onttoon" kappaleeseen, jonka sisäpintana on pieni pallo ja ulkopintana kyseinen ellipsoidi. Oletetaan tunnetuksi, että radiaaliselle vektorikentälle

$$\mathbf{F}(r) = a(r)\mathbf{e}_r$$

pätee pallokoordinaateissa

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 a(r))}{\partial r}.$$

Lisätieto: Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

Eräitä kaavoja:

- $\nabla\cdot(a\mathbf{F}+b\,\mathbf{G}) = a\nabla\cdot\mathbf{F}+b\nabla\cdot\mathbf{G}$, $\nabla\times(a\mathbf{F}+b\,\mathbf{G}) = a\nabla\times\mathbf{F}+b\nabla\times\mathbf{G}$, $a, b \in \mathbf{R}$
- $\nabla\times\nabla f = \bar{0}$, $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) = 0$
- $\nabla\cdot(f\mathbf{F}) = \nabla f\cdot\mathbf{F} + f(\nabla\cdot\mathbf{F})$, $\nabla\times(f\mathbf{F}) = \nabla f\times\mathbf{F} + f(\nabla\times\mathbf{F})$
- $\overline{x} = \frac{1}{A}\iint x\,dA$, $\overline{y} = \frac{1}{A}\iint y\,dA$
- $\oint_{\partial D} F_1\,dx + F_2\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$
- Tällä kurssilla $\mathbf{n}$ = yksikkönormaali.
- $\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iint_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$
- $\iint_P (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS = \oint_{\partial P} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial P} F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$
- (r, φ, θ): $x = r\sin(\varphi)\cos(\theta)$, $y = r\sin(\varphi)\sin(\theta)$, $z = r\cos(\varphi)$, $dV = r^2\sin(\varphi)\,dr\,d\varphi\,d\theta$
- $(r_\perp, \theta, z)$: $x = r_\perp\cos(\theta)$, $y = r_\perp\sin(\theta)$, $z = z$, $dV = r_\perp\,dr_\perp\,d\theta\,dz$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$, $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$, $\sin^3 x = \sin x(1-\cos^2 x)$.

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

Huom. 2: Kurssitentin voi uusia seuraavan tentin yhteydessä. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**