ELEC-A7200 Signaalit ja järjestelmät

Syksy 2022, 1. välikoe

21.10.2022

1 Tehtävä

a) (2p.) Olkoot $x_1(t)$ ja $x_2(t)$ ortonormaaleja energiasignaaleja. Ratkaise

$$\langle x_1(t) - x_2(t), x_1(t)\rangle \quad \text{ja} \quad \langle x_1(t) - x_2(t), x_2(t)\rangle$$

b) (2p.) Olkoon $x_3(t) = 2 \cdot \text{tria}\left(\frac{t}{4}\right)$, missä

$$\text{tria}(t) = \begin{cases} 1+t, & -1 \le t < 0 \\ 1-t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{muualla.} \end{cases}$$

Esitä signaali $x_4(t) = \frac{dx_3(t)}{dt}$ muotoa rect $\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$ olevien kanttipulssien avulla, missä

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Piirrä signaalien $x_3(t)$ ja $x_4(t)$ kuvaajat.

c) (2p.) Ratkaise

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_3(t)\, \delta(t-2)\, dt,$$

missä $\delta(t)$ on Diracin deltafunktio.

d) (4p.) Olkoon $x_5(t) = e^{-t}u(t)$, missä $u(t)$ on yksikköaskelfunktio:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Ratkaise signaalin $x_5(t)$ konvoluutio itsensä kanssa:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_5(\tau) x_5(t-\tau)\, d\tau.$$

Vinkki: Kannattaa piirtää kuva.

2 Tehtävä

Tarkastellaan jaksollista signaalia $x(t) = 2\cos(20\pi t)$.

a) (1p.) Mitkä ovat signaalin $x(t)$ jakso T_0 ja taajuus?

b) (3p.) Määritä signaalin eksponentiaalisen Fourier-sarjan kertoimet:

$$x_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-j2\pi\frac{k}{T_0}t}dt.$$

c) (2p.) Piirrä signaalin kaksipuoleinen amplitudi- ja vaihespektri.

d) (2p.) Piirrä signaalin yksipuoleinen tehospektri.

e) (2p.) Mikä on signaalin keskimääräinen teho?

3 Tehtävä

Tarkastellaan pulssia $x(t) = \frac{A}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{4}\right) + \frac{A}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$. Pulssi on esitetty kuvassa 1.

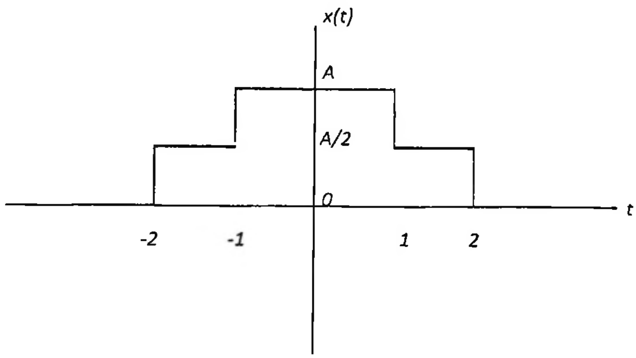

Figure 1: Pulssi/puls/pulse $x(t)$.

a) (2p.) Määritä pulssin amplitudi A siten, että pulssin energia on 1.

b) (4p.) Ratkaise signaalin Fourier-muunnos $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$ sekä energiaspektritiheys $|X(f)|^2$.

c) Pulssi $x(t)$ kulkee kaikuisen kanavan läpi. Kanavan toisessa päässä otetaan vastaan pulssi $y(t)$, joka voidaan esittää signaalin $x(t)$ ja kanavan ns. *impulssivasteen* $h(t)$ konvoluutiona:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau.$$

Impulssivaste on: $h(t) = \delta(t) + \delta(t-2)$, missä $\delta(t)$ on Diracin deltafunktio.

i) (2p.) Ratkaise impulssivasteen $h(t)$ Fourier-muunnos $H(f)$.

ii) (2p.) Ratkaise signaalin $y(t)$ Fourier-muunnos $Y(f)$ ja energiaspektri $|Y(f)|^2$.