

**TENTTI, DISKREETIN MATEMATIIKAN PERUSTEET,
MS-A0401**

- **Aika:** 18.10.2022, 16:30-19:30
- **Apuvälineet:** Yksi sivu (A4) opiskelijan itse käsin kirjoittamia muistiinpanoja, merkattu opiskelijan nimellä.
- Kirjoita eri tehtävien vastaukset eri sivuille. Joka tehtävästä saa maksimissaan 4 pistettä.
- Perustele vastauksesi huolella. Perustelemattomista vastauksista ei saa pisteitä.
- Onnea, pidä hauskaa! /Ragnar

TEHTÄVÄ 1

Etsi Diofantoksen yhtälön

$$34x + 562y = 8$$

kaikki kokonaislukuratkaisut.

TEHTÄVÄ 2

Todista, että kaikille $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = 1 - \frac{1}{2n+1}.$$

TEHTÄVÄ 3

Suomalainen rekisterikilpi koostuu kolmesta kirjaimesta (A-Z, eil 26 mahdollista kirjainta) ja kolmesta luvusta (0-9). Tässä tehtävässä oletetaan siis, että kaikki tällaiset kirjain- ja lukukolmikot ovat salittuja (vaikka todellisuus onkin vähän monimutkaisempi).

a) Montako mahdollista rekisterikilpiä on olemassa? [1p]

Palindromi on kirjainjono, joka on sama luettu sekä etu- että takaperin, kuten esimerkiksi *akka*, *avaava*, tai *saippuakauppias*.

b) Kuinka monessa rekisterikilvessä kirjaimet tai luvut muodostavat palindromin? [3p]

TEHTÄVÄ 4

Tutkitaan permutaatiot

$$\pi = (1234)(24)(125)(567)(17) \text{ ja } \sigma = (12)(345)(18)(567)(12)$$

joukossa S_8 .

- Kirjoita π ja σ erillisten syklien tulona. [1p]
- Kirjoita π ja σ kaksirivisessä esitysmuodossa. [1p]
- Kirjoita π ja σ vaihtojen tulona. [1p]
- Ovatko π ja σ konjugaatit? Jos ovat, niin etsi τ siten, että $\tau\pi\tau^{-1} = \sigma$. [1p]

TEHTÄVÄ 5

Joukkojen A ja B *symmetrinen ero* on $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ¹. Määritellään relaatio \sim joukossa $P(\mathbb{N})$ siten, että $A \sim B$ jos ja vain jos $A\Delta B$ on äärellinen.²

- a) Osoita, että \sim on ekvivalenssirelaatio. [3p]
- b) Mikä on ekvivalenssiluokka $[\emptyset]_{\sim}$? [1p]

¹Toisin sanoen, $A\Delta B$ sisältää kaikki alkiot, jotka ovat joko A :ssa tai B :ssä, mutta eivät molemmissa joukoissa.

²Muistathan, että $P(\mathbb{N})$ on joukon \mathbb{N} potenssijoukko. Toisin sanoen, $P(\mathbb{N})$ koostuu kaikista joukoista, joiden alkiot ovat luonnollisia lukuja.