

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu  
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

**MS-A0103 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1** Malinen/Nyman

**Kurssitentti ja yleinen tentti 19.10.2022 klo. 16:30–19:30**

**Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.  
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.**

Kirjoita kaikkiin vastauspapereihisi oma nimesi ja opiskelijanumerosi. Laskimet ja taulukot kiellettyjä. Perustele vastauksesi. Pelkistä lopputuloksista (oikeista-kaan) ei pisteitä tule.

Kaikki periodin I/2022 luentokurssille osallistuneet voivat halutessaan laskea kuusi tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”.

1. Selvitä suppenevatko vai hajaantuvatko seuraavat sarjat:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ ,  
(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ ,  
(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^3 + \sqrt{n} \sin(\pi n^3)}$ .

Kohtien (a)–(c) maksimipistemäärät (1p), (2p) ja (3p).

2. (a) Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 1}. \quad (3p)$$

- (b) Olkoon  $K \in \mathbb{R}$  vakio. Laske

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Kn + \pi\sqrt{n}}{e^{K^2} - n\sqrt{K}}. \quad (3p)$$

3. Määritä funktion  $f(x) = x^2 \sin(3x)$  Taylorin polynomi  $P_5(x)$  käyttäen kehityskeskipisteenä  $x_0 = 0$ . (6p)

**KÄÄNNÄ!**

4. Laske integraalit

$$\int_0^2 20(x-2)^4 dx, \int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) dx \text{ ja } \int_0^{\infty} e^{-x} dx.$$

**Vihje:** Toiseen integraaliin voi sijoittaa  $x = u^2$ .

Kustakin integraalista maksimipisteet (2p).

5. Olkoon  $n > 1$  kokonaisluku. Etsi differentiaaliyhtälön

$$xy' + ny = 1, \quad x > 0,$$

se ratkaisu  $y = y(x)$ , joka toteuttaa alkuehdon  $y(1) = 1$ . (6p)

6. Määritä differentiaaliyhtälölle  $y'' + 6y' + 5y = 0$  sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = 8$ . (6p)

Ethän unohda, että palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden ylimääräisen loppukoepisteen!

**KÄÄNNÄ!**