

Ohje: Vastaa lyhyesti ja ytimekkäästi, mutta perustele ratkaisusi. Pelkkä lukuarvo vastauksena ei anna pisteitä. Kokeessa on 4 tehtävää, jokaisesta saa 0–6 pistettä. Kokeen lopussa on standardinormaali jakauman kertymäfunktion taulukko.

Sallitut välineet: kirjoitusvälineet, laskin (symbolinen ja graafinen OK), enintään A4-kokoinen lunttilappu, jossa kirjoitusta yhdellä puolella.

T1 Herrat A , B ja C ovat metsästävässä ja ampuvat samanaikaisesti kohti samaa hirveä. Heidän todennäköisyytensä osua hirveen ovat 0.2, 0.3 ja 0.4, ja osumiset ovat riippumattomia. Olkoot A , B ja C indikaattorimuuttujat, jotka ilmaisevat, osuiko kyseinen herra hirveen vai ei.

- (a) Luettele satunnaisvektorin (A, B, C) mahdolliset arvot ja niiden todennäköisyydet kolmella desimaalilla (yhdellä, jos käytät prosentteja). (2p)
- (b) Olkoon X hirveen osuneiden luotien lukumäärä. Luettele X :n mahdolliset arvot ja niiden todennäköisyydet. (2p)
- (c) Jos hirveen osuu tasan yksi luoti, mikä on todennäköisyys, että se on herran C ampuma? (2p)

T2 Eräällä satunnaismuuttujalla X on jatkuva jakauma tiheysfunktiolla f , missä

$$f(x) = \begin{cases} x/2 - 5 & \text{jos } 10 \leq x \leq 12, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

- (a) Määritä X :n kertymäfunktio. (1p)
- (b) Laske X :n odotusarvo. (1p)
- (c) Laske X :n moodi (tiheysfunktion maksimikohta). (1p)
- (d) Laske X :n mediaani, ts. sellainen luku m , että $\mathbb{P}(X \leq m) = 1/2$. (1p)
- (e) Laske satunnaismuuttujan $Y = 12 - X$ odotusarvo. (1p)
- (f) Laske $\mathbb{P}(X^2 < 121)$. (1p)

Kohdissa (b)–(e) ilmoita vastausten lukuarvot kolmella desimaalilla.

T3 Luennoijalla on neljä 6-sivuista noppaa, joista kolme on tavallisia (tulokset $1, \dots, 6$ ovat yhtä todennäköiset) ja neljäs on painotettu siten, että tuloksen i todennäköisyys on $i/21$, kun $i = 1, \dots, 6$. Luennoija on poiminut yhden nopista satunnaisesti ja heittänyt sitä seitsemän kertaa saaden tulosjonon $(6, 6, 2, 5, 6, 6, 5)$. Merkitään $\Theta = 1$ jos poimittu noppa on tavallinen ja $\Theta = 2$ jos se on painotettu.

- (a) Laske todennäköisyys saada juuri tämä tulosjono, jos noppa oli tavallinen. (1p)
- (b) Laske todennäköisyys saada juuri tämä tulosjono, jos noppa oli painotettu. (1p)
- (c) Määritä parametrin Θ posteriorijakauma. (3p)
- (d) Käyttäen saatua posteriorijakaumaa, määritä todennäköisyys saada kolme kuutosta, jos poimittua noppaa heitetään vielä kolme kertaa. (1p)

T4 Eräästä datalähteestä saadaan riippumattomia satunnaislukuja, joista kukin saa arvon 1 todennäköisyydellä θ , ja arvon 0 todennäköisyydellä $1 - \theta$. Parametrin $\theta \in [0, 1]$ arvo on tuntematon. Lähteestä on saatu havainnot $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ ja $x_4 = 1$. Auta Ronaldia, Karlia ja Thomasia estimoimaan θ :n arvoa havaintojen perusteella. Kaikissa kohdissa vastaus on perusteltava laskutoimituksin (vetoaminen jakauman tunnistamiseen ja sen tunnettuihin ominaisuuksiin ei riitä).

- (a) Ronald käyttää suurimman uskottavuuden estimaattia. Määritä parametrin uskottavuusfunktio havaintojen perusteella ja sen perusteella parametrin su-estimaatti. (2p)
- (b) Karl käyttää momenttiestimaattia, eli hän etsii sellaisen θ :n arvon, että datalähteen odotusarvo vastaa havaintojen keskiarvoa. Määritä Karlin estimaatti. (2p)
- (c) Thomas pitää parametria satunnaismuuttujana Θ , jonka priorijakauman tiheys on $f_{\Theta}(\theta) = \theta(1 - \theta)$, kun $0 \leq \theta \leq 1$, ja nolla muualla. Määritä parametrin posteriorijakauman tiheysfunktio (voit jättää normalisointivakion ratkaisematta) sekä sen perusteella parametrin posteriorimoodi eli θ :n arvo, jossa posterioritiheys on suurimmillaan. (2p)