

UUSINTATENTTI, DISKREETIN MATEMATIIKAN PERUSTEET,
MS-A0401

- **Aika:** 8.12.2022, 16:30-19:30
- **Apuvälineet:** Vain kirjoitusvälineet.
- Kirjoita eri tehtävien vastaukset eri sivuille. Joka tehtävästä saa maksimissaan 6 pistettä. Tehtävässä, jossa on kolme osatehtävää, joka osatehtävästä saa maksimissaan 2 pistettä.
- Perustele vastauksesi huolella. Perustelemattomista vastauksista ei saa pisteitä.
- Onnea, pidä hauskaa! /Ragnar

TEHTÄVÄ 1

Tavallisessa korttipakassa on 52 korttia, jossa jokaisella kortilla on maa ($\diamond, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit$) ja arvo (ässä, kuningas, rouva, jätkä, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2).

- a) *Pokerikäsi* koostuu viidestä kortista, ilman järjestystä. Laske kaikkien pokerikäsiäsi lukumäärä.
- b) *Värisuora* (en. straight flush) on pokerikäsi, jossa kaikkien korttien värit on sama, ja niiden arvot ovat peräkkäiset, jossa ässän arvo voi laskea ollakseen joko heti kuningasta isompi tai kakkosta pienempi (muttei molemmat yhtä aikaa). Siispä esimerkiksi

$$\{\diamond 4, \diamond 7, \diamond 8, \diamond 5, \diamond 6\}, \{\heartsuit A, \heartsuit 3, \heartsuit 5, \heartsuit 4, \heartsuit 2\} \text{ ja } \{\spadesuit A, \spadesuit J, \spadesuit 10, \spadesuit R, \spadesuit K\}$$

ovat kaikki värisuoria, kun taas $\{\clubsuit A, \clubsuit 2, \clubsuit 3, \clubsuit R, \spadesuit K\}$ ei ole värisuoraa. Laske kaikkien värisuorien lukumäärä.

- c) *Värikäsi* (en. flush) on käsi, jossa kaikkien korttien värit on sama, mutta joka ei ole värisuoraa. Laske kaikkien värikäsiäsi lukumäärä.

TEHTÄVÄ 2

Tiina Teekkari haluaa todistaa, että väitteet A, B, C ja D ovat yhtäpitävät, eli taisin sanoin, että $X \rightarrow Y$ aina pätee jos $X, Y \in \{A, B, C, D\}$. Hän on jo todistanut implikaatiot $A \rightarrow B, B \rightarrow D, (\neg A) \rightarrow (\neg D)$, sekä $B \rightarrow C$. Selitä, miksi nämä implikaatiot eivät vielä todista, että kaikki väitteet ovat yhtäpitäviä. Todista myös, että jos Tiina onnistuu muuttamaan yhtä implikaatiota toiseen suuntaan meneväksi implikaatioksi, niin hän on todistanut että kaikki väitteet ovat yhtäpitävät.

Vihje: Piirrä suunnattu verkko, jonka solmut ovat väitteet A, B, C ja D , ja jossa on kaari $X \rightarrow Y$ aina jos implikaatio $X \rightarrow Y$ on todistettu. Onko relaatio \rightarrow transitiivinen?

TEHTÄVÄ 3

Osoita, että kaikille kokonaisluvulle $n \in \mathbb{Z}$ pätee $30|(n^5 - n)$.

TEHTÄVÄ 4

Laske potenssit. Kirjoita vastaukset muodossa $k \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$, kun lasketaan modulo n .

- a) $2^{32} \pmod{11}$.
- b) $3^{35} \pmod{17}$.
- c) $9^{100} \pmod{21}$.

TEHTÄVÄ 5

Olkoon $M = \{a, b, c, d, e\}$. Muodostetaan verkko $G = (V, E)$, jossa solmujoukko V on joukon M kahden alkioden osajoukkojen joukko (eli esim. $\{a, d\} \in V$) ja kahden solmujen välillä on kaari jos ja vain jos vastaavien joukkojen leikkaus on tyhjä. Symmetrian takia, kaikilla solmuilla on sama aste.

- a) Montako solmua on verkossa G ?
- b) Piirrä verkko G .
- c) Laske verkon G kromaattinen luku.