Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Tölle/Makkonen

MS-A0107 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (CHEM)

Kurssitentti ja yleinen tentti 19.10.2022 klo 16.30–19.30.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun (max. 30p).
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää (max. 36p).
Kaikki I-periodin luentokurssille osallistuneet voivat siis halutessaan laskea kuusi tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää".
Jokaisesta tehtävästä voi saada max. 6p.

1. Selitä lyhyesti (ilman perusteluja) seuraavat differentiaaliyhtälöihin (DY) liittyvät käsitteet:
   a) Kertaluku; alkuehto;
   b) Separoituva DY; triviaaliratkaisu;
   c) Homogeeninen lineaarinen DY; epähomogeeninen lineaarinen DY.

2. a) Määritä sarjan
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{4^k}$$
summa.
   b) Millä muuttujan $x \in \mathbb{R}$ arvoilla potenssisarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^k}{k}$$
suppenee? Määritä suppenemisäde.

3. a) Osoita, että funktioilla $f(x) = \tan^2(x)$ ja $g(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ on sama derivaatta.
   b) Mikä suhde funktioilla f ja g on? Perustele vastauksesi.

4. a) Osoita, että funktio $f\colon [0,\pi[\;\to [0,\infty[$, $f(x) = x\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on aidosti kasvava. Tästä seuraa, että sillä on käänteisfunktio f^{-1}, mutta tarkempaa perustelua ei vaadita.
   b) Laske $f(\pi/2)$ ja tätä tietoa käyttämällä $(f^{-1})'(\pi/2)$.

5. Selvitä, suppeneeko epäoleellinen integraali
$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2}\, dx,$$
ja laske mahdollisesti sen arvo.
Vihje: Käytä sijoitusta $z = -x^2$ ja tämän jälkeen osittaisintegrointia.

6. a) Määritä differentiaaliyhtälölle $y' = y + e^x$, sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(0) = 2$.
b) Määritä differentiaaliyhtälölle $y' = y^2$, sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(0) = 1$.

Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

$$
\begin{bmatrix}
\alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\
\sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\
\cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\
\tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0
\end{bmatrix}
$$

Eräitä kaavoja ja Taylor-/Maclaurin approksimaatioita:

$$
\begin{aligned}
\cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
\frac{d}{dx}\sin x &= \cos x \\
\frac{d}{dx}\cos x &= -\sin x \\
\frac{d}{dx}\tan x &= 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \\
\frac{d}{dx}\arctan x &= \frac{1}{1+x^2} \\
\frac{d}{dx}\arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\frac{1}{1-x} &\approx 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k \\
e^x &\approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \\
\ln(1+x) &\approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k \\
\sin x &\approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\
\cos x &\approx 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}
\end{aligned}
$$

Huom. MS-A0107-kurssitentin voi uusia II-periodin tentin yhteydessä 15.12.2022. Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.