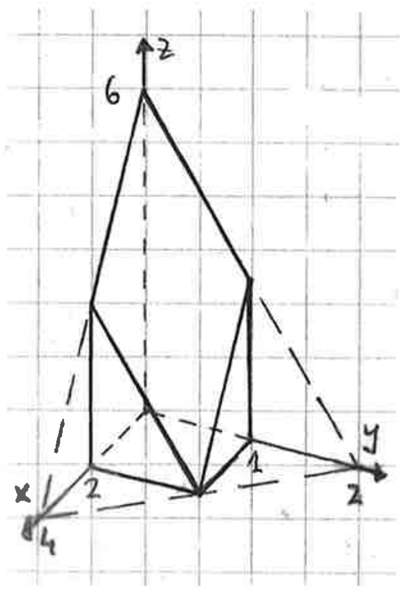
MS-A0202 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2, syksy 2022 — Metsalo
Tentti, 18.10.2022

Tentissä ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja
(mutta alhaalla löytyy joitakin kaavoja)

Tehtävä 1. Piste $P(1,1,\sqrt{2})$ on pallopinnan $S: x^2+y^2+z^2=4$ ja lieriön $C: x^2+y^2=2x$ leikkauskäyrällä.
a) Määritä jokin normaalivektori pallopinnalle S pisteessä P. (1p.)
b) Määritä jokin normaalivektori lieriölle C pisteessä P. (1p.)
c) Määritä jokin tangenttivektori pallopinnan ja lieriön leikkauskäyrälle pisteessä P. (2p.)
d) Missä pisteessä Q leikkauskäyrän tangenttisuora pisteessä P leikkaa xy-tasoa? (2p.)

Tehtävä 2. a) Määritä funktion $f(x,y)=(x^2e^y-3)^{1/2}$ ensimmäisen asteen Taylorin polynomi $P_1(x,y)$ pisteen $(a,b)=(2,0)$ ympäristössä ja approksimoi lukua $f(2.02,-0.03)$ luvulla $P_1(2.02,-0.03)$. (3p.)
b) Määritä funktion $f(x,y)=(x^2e^y-3)^{1/2}$ toisen asteen Taylorin polynomi $P_2(x,y)$ pisteen $(a,b)=(2,0)$ ympäristössä ja approksimoi lukua $f(2.02,-0.03)$ luvulla $P_2(2.02,-0.03)$. (3p.)



Tehtävä 3.

$$g(x,y)=\frac{x-y}{1+x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{x^2+y^2\to\infty} g(x,y)=0.$$

Määritä funktion $g(x,y)$ suurin ja pienin arvo ylemmällä tasopuoliskolla $y\geq 0$. (6p.)

Tehtävä 4. Heksaederia oikealla rajoittavat koordinaatitasot, tasot $x=2$ ja $y=1$ sekä taso, joka kulkee pisteiden $(4,0,0)$, $(0,2,0)$ ja $(0,0,6)$ kautta, joten sen tilavuus on 6. Pisteessä (x,y,z) sen tiheys on $\delta(x,y,z)=xy$, joten $\delta_{min}=0$ ja $\delta_{max}=2$. Laske heksaederin massa. (6p.)

Tehtävä 5. Homogeenisen R-säteisen puolipallon $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq R^2,\ z\geq 0\}$ tilavuus on (tiedenkin) $V=\iiint_W dV=\frac{2\pi}{3}R^3$ ja sen keskiö on symmetrian takia z-akselilla.
Laske keskiön z-koordinaatti $\bar{z}=\frac{1}{V}\cdot\iiint_W z\,dV$
a) sylinterikoordinaatien avulla (3p.), b) pallokoordinaattien avulla (3p.).

Kaavoja: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
$\cos^2\phi+\sin^2\phi=1$, $\cos^2\phi=(1+\cos(2\phi))/2$, $\sin^2\phi=(1-\cos(2\phi))/2$.
$\sin(2t)=2\sin t\cos t$, $\cos(2t)=\cos^2 t-\sin^2 t=2\cos^2 t-1=1-2\sin^2 t$.
$\sin(u\pm v)=\sin(u)\cos(v)\pm\cos(u)\sin(v)$, $\cos(u\pm v)=\cos(u)\cos(v)\mp\sin(u)\sin(v)$.
$\int\sqrt{1+t^2}dt=\frac{t}{2}\cdot\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2}\cdot\ln(t+\sqrt{1+t^2})+C$.