MS-A0202 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2, syksy 2022 Metsalo
Ratkaisut, 18.10.2022

Tehtävä 1. Piste $P(1,1,\sqrt{2})$ on pallopinnan $S: x^2+y^2+z^2=4$ ja lieriön $C: x^2+y^2=2x$ leikkauskäyrällä.
a) Määritä jokin normaalivektori pallopinnalle $S$ pisteessä $P$. (1p.)
b) Määritä jokin normaalivektori lieriölle $C$ pisteessä $P$. (1p.)
c) Määritä jokin tangenttivektori pallopinnan ja lieriön leikkauskäyrälle pisteessä $P$. (2p.)
d) Missä pisteessä $Q$ leikkauskäyrän tangenttisuora pisteessä $P$ leikkaa $xy$-tasoa? (2p.)

Ratkaisu a) $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0 \Rightarrow \nabla F=(2x,2y,2z) \Rightarrow \nabla F(P)=(2,2,2\sqrt{2}) \parallel (1,1,\sqrt{2})$.
b) $G(x,y,z)=x^2+y^2-2x=0 \Rightarrow \nabla G=(2x-2,2y,0) \Rightarrow \nabla G(P)=(0,2,0) \parallel (0,1,0)$.
c) $(1,1,\sqrt{2})\times(0,1,0)=(-\sqrt{2},0,1)$.
d) $\mathbf{r}(t)=(1,1,\sqrt{2})+t(-\sqrt{2},0,1)=(1-\sqrt{2}t,1,\sqrt{2}+t)=(x(t),y(t),z(t))$. $z(t)=0 \Leftrightarrow t=-\sqrt{2}$.
$\mathbf{r}(-\sqrt{2})=(3,1,0)$.

Tehtävä 2. a) Määritä funktion $f(x,y)=(x^2e^y-3)^{1/2}$ ensimmäisen asteen Taylorin polynomi $P_1(x,y)$ pisteen $(a,b)=(2,0)$ ympäristössä ja approksimoi lukua $f(2.02,-0.03)$ luvulla $P_1(2.02,-0.03)$. (3p.)
b) Määritä funktion $f(x,y)=(x^2e^y-3)^{1/2}$ toisen asteen Taylorin polynomi $P_2(x,y)$ pisteen $(a,b)=(2,0)$ ympäristössä ja approksimoi lukua $f(2.02,-0.03)$ luvulla $P_2(2.02,-0.03)$. (3p.)

Ratkaisu a) $f(x,y)=(x^2e^y-3)^{1/2} \Rightarrow f(2,0)=(4\cdot 1-3)^{1/2}=1$. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot(x^2e^y-3)^{-1/2}\cdot 2xe^y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,0)=2$,
$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}\cdot(x^2e^y-3)^{-1/2}\cdot x^2e^y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2,0)=2$.
$P_1(x,y)=f(2,0)+(\frac{\partial f}{\partial x}(2,0)\cdot(x-2)+\frac{\partial f}{\partial x}(2,0)\cdot(y-0))=1+(2(x-2)+2y) \Rightarrow$
$P_1(2.02,-0.03)=1+(2\cdot 0.02+2\cdot(-0.03))=0.98$.
b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{1}{4}\cdot(x^2e^y-3)^{-3/2}\cdot(2xe^y)^2+\frac{1}{2}\cdot(x^2e^y-3)^{-1/2}\cdot 2e^y \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,0)=-4+1=-3$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{4}\cdot(x^2e^y-3)^{-3/2}\cdot x^2e^y\cdot(2xe^y)+\frac{1}{2}\cdot(x^2e^y-3)^{-1/2}\cdot 2xe^y=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2,0)=-4+2=-2$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{1}{4}\cdot(x^2e^y-3)^{-3/2}\cdot(x^2e^y)^2+\frac{1}{2}\cdot(x^2e^y-3)^{-1/2}\cdot x^2e^y \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,0)=-4+2=-2$.
$P_2(x,y)=f(2,0)+(\frac{\partial f}{\partial x}(2,0)\cdot(x-2)+\frac{\partial f}{\partial x}(2,0)\cdot(y-0))+$
$\frac{1}{2!}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,0)\cdot(x-2)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2,0)\cdot(x-2)(y-0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,0)\cdot(y-0)^2)=$
$1+(2(x-2)+2y)+\frac{1}{2!}(-3(x-2)^2-4(x-2)y-2y^2) \Rightarrow$
$P_2(2.02,-0.03)=0.98+\frac{1}{2}(-0.0012+0.0024-0.0018)=0.9797$.
(Laskin antaa $(2.02^2\cdot e^{-0.03}-3)^{1/2}=0.979696869$.)

Tehtävä 3.

$$g(x,y)=\frac{x-y}{1+x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{x^2+y^2\to\infty} g(x,y)=0.$$

Määritä funktion $g(x,y)$ suurin ja pienin arvo ylemmällä tasopuoliskolla $y\geq 0$. (6p.)

Ratkaisu i) Kriittiset pisteet, missä $\nabla g=\mathbf{0}$:
$\frac{\partial g}{\partial x}=(1+2xy-x^2+y^2)/(1+x^2+y^2)=0$, $\frac{\partial g}{\partial y}=(-1-2xy-x^2+y^2)/(1+x^2+y^2)=0$.
Kriittisissä pisteissä $x^2=y^2$ ja $2xy=1$. Alueessa $y\geq 0$ on yksi kriittinen piste: $(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$.
ii) $g$:llä ei ole singulaaripisteitä.
iii) Reunalla $y=0$ on $g(x,0)=x/(1+x^2)=h(x)$.
i) $h'(x)=(1-x^2)/(1+x^2)^2=0$, kun $x=\pm 1$.
ii) $h$:lla ei ole singulaaripisteitä.
iii) $h\to 0$, kun $x\to\pm\infty$.
$g(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})=-1/\sqrt{2}$, $g(-1,0)=-1/2$, $g(1,0)=1/2$, joten
$g_{max}=g(1,0)=1/2$ ja $g_{min}=g(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})=-1/\sqrt{2}$.

Tehtävä 4. Heksaederia oikealla rajoittavat koordinaatitasot, tasot $x = 2$ ja $y = 1$ sekä taso, joka kulkee pisteiden $(4, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ ja $(0, 0, 6)$ kautta, joten sen tilavuus on 6. Pisteessä $(x, y, z)$ sen tiheys on $\delta(x, y, z) = xy$, joten $\delta_{min} = 0$ ja $\delta_{max} = 2$. Laske heksaederin massa. (6p.)

Ratkaisu $x/4 + y/2 + z/6 = 1 \Leftrightarrow z = f(x, y) = 6(1 - x/4 - y/2)$ on kuudennen tason yhtälö ja heksaederin projektio $xy$-tasolle on suorakulmio $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2],\ y \in [0, 1]\}$.
Massa $m = \iiint \delta(x, y, z)dV = \iint_\Omega (\int_0^{f(x,y)} xydz)dA = \iint_\Omega [xyz]_0^{6(1-x/4-y/2)} dA =$
$\int_0^1 (\int_0^2 xy \cdot (6(1-x/4-y/2)-0)dx)dy = \int_0^1 [3x^2y - x^3y/2 - 3x^2y^2/2]_0^2 dy = \int_0^1 (12y - 4y - 6y^2 - 0)dy =$
$[4y^2 - 2y^3]_0^1 = 4 - 2 - 0 = 2.$

Tehtävä 5. Homogeenisen $R$-sädeisen puolipallon $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ z \ge 0\}$ tilavuus on (tiedenkin) $V = \iiint_W dV = \frac{2\pi}{3} R^3$ ja sen keskiö on symmetrian takia $z$-akselilla.
Laske keskiön $z$-koordinaatti $\bar{z} = \frac{1}{V} \cdot \iiint_W zdV$
a) sylinterikoordinaatien avulla (3p.), b) pallokoordinaattien avulla (3p.).

Ratkaisu Tässä kaikki integroimis-järjestykset toimivat yhtä hyvin!
a) $\bar{z} = \frac{1}{V} \cdot \int_0^R (\int_0^{2\pi} (\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} z \cdot rdr)d\theta)dz = \frac{1}{V} \cdot \int_0^R (\int_0^{2\pi} [zr^2/2]_0^{\sqrt{R^2-z^2}} d\theta)dz =$
$\frac{1}{V} \cdot \int_0^R (\int_0^{2\pi} \frac{z}{2}(R^2 - z^2)d\theta)dz = \frac{1}{V} \cdot \int_0^R \pi(R^2z - z^3)dz = \frac{\pi}{V} \cdot [\frac{R^2z^2}{2} - \frac{z^4}{4}]_0^R = \frac{\pi}{V} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{2\pi R^3/3} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{3}{8}R.$
b) $\bar{z} = \frac{1}{V} \cdot \int_0^{2\pi} (\int_0^{\pi/2} (\int_0^R \rho\cos\phi \cdot \rho^2 \sin\phi d\rho)d\phi)d\theta = \frac{1}{V} \cdot (\int_0^{2\pi} d\theta)(\int_0^{\pi/2} \cos\phi \sin\phi d\phi)(\int_0^R \rho^3 d\rho) =$
$\frac{1}{V} \cdot 2\pi \cdot [\frac{1}{2}\sin^2\phi]_0^{\pi/2} \cdot [\rho^4/4]_0^R = \frac{\pi}{V} \cdot 1 \cdot R^4/4 = \frac{3}{8}R.$