MS-A0202 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2, syksy 2022 Metsalo
Tentti, 15.12.2022

**Tentissä ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja**
(mutta alhaalla löytyy joitakin kaavoja)

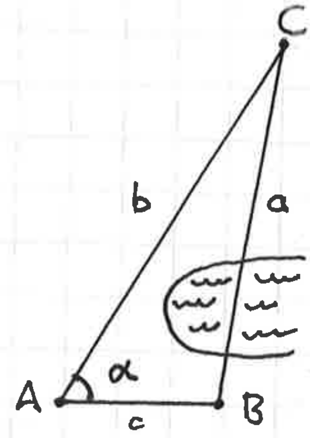
Tehtävä 1. Tutkimme avaruuskäyrää $C$ : $\mathbf{r}(t) = 3t^2\mathbf{i} + 4t^3\mathbf{j} + 3t^4\mathbf{k}$, $t \in [-1, 2]$.
a) Määritä käyrän päätepisteet ja niiden välinen etäisyys. (2p.)
b) Laske käyrän kaarenpituus. (4p.)

Tehtävä 2. Karteesisilla koordinaateilla $x, y$ ja napakoordinaateilla $r, \theta$ pätee

$$x = r \cdot \cos\theta, y = r \cdot \sin\theta \Rightarrow \tan\theta = y/x \text{ (kun } x \neq 0) \text{ ja } r^2 = x^2 + y^2.$$

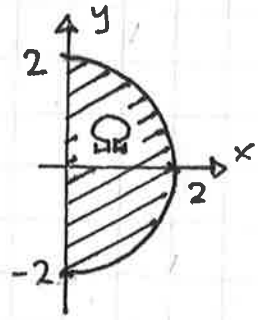
Osoita, että $\frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$. (6p.)
(Tutusta kaavasta $d(\tan(t))/dt = 1 + \tan^2(t)$ saattaa olla hyötyä.)

Tehtävä 3. Tarja Teekkari halusi mitata kahden pisteen $B$ ja $C$ välisen etäisyyden $a$. Sitä varten hän käytti yksinkertaista sekstanttia, jonka avulla hän pystyi hyvin tarkasti mittaamaan kulman 60°, ja kulki, kunnes löysi erään pisteen $A$, missä $AB$:n ja $AC$:n välinen kulma oli 60°. Hän mittasi, että etäisyys $AB$ oli $c = 300 \pm 5\,m$ ja että etäisyys $AC$ oli $b = 800 \pm 10\,m$, kuten kuvassa oikealla. Kosinilauseesta $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ seuraa silloin, että etäisyys $BC$ on $a \approx 700\,m$. Laske lineaariapproksimaation avulla *approksimatiivinen* yläraja $a$:n epätarkkuudelle, jonka $b$:n ja $c$:n epätarkkuudet aiheuttavat. (6p.)




Tehtävä 4. Olkoon $c$ positiivinen vakio. Osoita, että kun $x, y, z \geq 0$ ja $x+y+z = 3c$, niin funktion $f(x, y, z) = xyz$ suurin arvo on $c^3$. (6p.)
(Tästä seuraa että kolmen ei-negatiivisen luvun $x$, $y$ ja $z$ *aritmeettinen* keskiarvo $a = \frac{1}{3}(x+y+z)$ ja *geometrinen* keskiarvo $g = \sqrt[3]{xyz}$ toteuttavat epäyhtälön $a \geq g$.)

Tehtävä 5. Laske $\iint_\Omega (x + y^2)dA$, kun $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$. (6p.)




**Kaavoja:** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$, $\cos^2\phi = (1 + \cos(2\phi))/2$, $\sin^2\phi = (1 - \cos(2\phi))/2$.
$\sin(2t) = 2\sin t\cos t$, $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$.
$\sin(u \pm v) = \sin(u)\cos(v) \pm \cos(u)\sin(v)$, $\cos(u \pm v) = \cos(u)\cos(v) \mp \sin(u)\sin(v)$.
$\int \sqrt{1+t^2}dt = \frac{t}{2} \cdot \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \cdot \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + C$.

1. Tutkimme avaruuskäyrää $C : \mathbf{r}(t) = 3t^2\mathbf{i} + 4t^3\mathbf{j} + 3t^4\mathbf{k},\ t \in [-1, 2]$.
   a) Määritä käyrän päätepisteet ja niiden välinen etäisyys. (2p.)
   b) Laske käyrän kaarenpituus. (4p.)

   **Ratkaisu:**
   a) $\mathbf{r}(-1) = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \Rightarrow P(3, -4, 3)$, $\mathbf{r}(2) = 12\mathbf{i} + 32\mathbf{j} + 48\mathbf{k} \Rightarrow Q(12, 32, 48)$, $\overrightarrow{PQ} = 9\mathbf{i} + 36\mathbf{j} + 45\mathbf{k} = 9(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \Rightarrow \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{9^2(1 + 16 + 25)} = 9\sqrt{42}\ (= \sqrt{3402})$.
   b) $\mathbf{r}'(t) = 6t\mathbf{i} + 12t^2\mathbf{j} + 12t^3\mathbf{k} = 6t(\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}) \Rightarrow \|\mathbf{r}'(t)\|^2 = (6t)^2(1 + 4t^2 + 4t^4) = (6t)^2(1 + 2t^2)^2$.
   $\ell = \int_{-1}^{2} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_{-1}^{2} \sqrt{(6t)^2(1 + 2t^2)^2} dt = \int_{-1}^{2} 6|t|(1 + 2t^2) dt = -\int_{-1}^{0} 6t(1 + 2t^2) dt + \int_{0}^{2} 6t(1 + 2t^2) dt = -[3t^2 + 3t^4]_{-1}^{0} + [3t^2 + 3t^4]_{0}^{2} = 6 + (12 + 48) = 66\ (> 63 = 9\sqrt{49} > 9\sqrt{42})$.

2. Karteesisilla koordinaateilla $x, y$ ja napakoordinaateilla $r, \theta$ pätee

   $$x = r \cdot \cos\theta, y = r \cdot \sin\theta \Rightarrow \tan\theta = y/x \text{ (kun } x \neq 0) \text{ ja } r^2 = x^2 + y^2.$$

   Osoita, että $\frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$. (6p.)
   (Tutusta kaavasta $d(\tan(t))/dt = 1 + \tan^2(t)$ saattaa olla hyötyä.)

   **Ratkaisu:**
   $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta$, $\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \cdot \sin\theta$, $\frac{\partial (r^2)}{\partial y} = 2r \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial y} = 2y \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2y}{2r} = \sin\theta$, $\frac{\partial (\tan\theta)}{\partial y} = (1 + \tan^2\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = (1 + (y/x)^2) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial (y/x)}{\partial y} = 1/x \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1/x}{1+(y/x)^2} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{r \cdot \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{r} \cdot \cos\theta \Rightarrow$
   $\frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = (\cos\theta) \cdot (\sin\theta) + (-r \cdot \sin\theta) \cdot (\frac{1}{r} \cdot \cos\theta) = 0$.

3. Tarja Teekkari halusi mitata kahden pisteen $B$ ja $C$ välisen etäisyyden $a$.
   Sitä varten hän käytti yksinkertaista sekstanttia, jonka avulla hän pystyi hyvin tarkasti mittaamaan kulman $60°$, ja kulki, kunnes löysi erään pisteen $A$, missä $AB$:n ja $AC$:n välinen kulma oli $60°$. Hän mittasi, että etäisyys $AB$ oli $c = 300 \pm 5\,m$ ja että etäisyys $AC$ oli $b = 800 \pm 10\,m$, kuten kuvassa oikealla. Kosinilauseesta $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ seuraa silloin, että etäisyys $BC$ on $a \approx 700\,m$. Laske lineaariapproksimaation avulla *approksimatiivinen* yläraja $a$:n epätarkkuudelle, jonka $b$:n ja $c$:n epätarkkuudet aiheuttavat. (6p.)

   **Ratkaisu:**
   $a(b, c) = (b^2 + c^2 - 2bc\cos 60°)^{1/2} = (b^2 + c^2 - bc)^{1/2} \Rightarrow \frac{\partial a}{\partial b} = \frac{2b-c}{2(b^2+c^2-bc)^{1/2}} = \frac{2b-c}{2a} \approx \frac{13}{14}$,
   $\frac{\partial a}{\partial c} = \frac{2c-b}{2(b^2+c^2-bc)^{1/2}} = \frac{2c-b}{2a} \approx -\frac{1}{7}$. $\Delta a \approx \frac{\partial a}{\partial b} \cdot \Delta b + \frac{\partial a}{\partial c} \cdot \Delta c \Rightarrow |\Delta a| \lessapprox |\frac{\partial a}{\partial b}| \cdot |\Delta b|_{max} + |\frac{\partial a}{\partial c}| \cdot |\Delta c|_{max} \approx \frac{13}{14} \cdot 10m + \frac{1}{7} \cdot 5m = (65m + 5m)/7 = 10m$ (joten $a \approx 300 \pm 10m$).

4. Olkoon $c$ positiivinen vakio. Osoita, että kun $x, y, z \geq 0$ ja $x + y + z = 3c$, niin funktion $f(x, y, z) = xyz$ suurin arvo on $c^3$. (6p.)
   (Tästä seuraa että kolmen ei-negatiivisen luvun $x$, $y$ ja $z$ *aritmeettinen* keskiarvo $a = \frac{1}{3}(x + y + z)$ ja *geometrinen* keskiarvo $g = \sqrt[3]{xyz}$ toteuttavat epäyhtälön $a \geq g$.)

   **Ratkaisu:**
   Maksimoidaan $f(x, y, z) = xyz$ kolmiossa $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = x + y + z - 3c = 0,\ x, y, z \geq 0\}$.
   1) Kriittiset pisteet: $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda \cdot g(x, y, z)$.
   $\frac{\partial L}{\partial x} = yz + \lambda = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y} = xz + \lambda = 0$, $\frac{\partial L}{\partial z} = xy + \lambda = 0$, $\frac{\partial L}{\partial x} = x + y + z - 3c = 0$.
   i) Jos $\lambda = 0$, niin 3 kriittistä pistettä: $(3c, 0, 0)$, $(0, 3c, 0)$, $(0, 0, 3c)$, joissa $f = 0$.
   ii) Jos $\lambda \neq 0$, niin yksi kriittinen piste: $(x, y, z) = (c, c, c)$, jossa $f = c^3$.
   2) $f$ ja $g$ ovat molemmat luokka $C^1$ ja $\nabla g = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \neq \mathbf{0}$, joten singulaaripisteitä ei ole.
   3) Kolmion reunoilla (koordinaattitasoissa) $f = 0$.
   $f(c, c, c) = c^3 > 0$, joten $f_{max} = c^3$ ja se saavutettaan kriittisessa pisteessä $(c, c, c)$.

5. Laske $\iint_\Omega (x + y^2) dA$, kun $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$. (6p.)

   **Ratkaisu:**
   $\iint_\Omega (x + y^2) dA = \{\text{napakoord.}\} = \int_{\pi/2}^{\pi/2} (\int_0^2 (r\cos\theta + r^2\sin^2\theta) r dr) d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi/2} [\frac{r^3}{3} \cdot \cos\theta + \frac{r^4}{4} \cdot \sin^2\theta]_0^2 d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi/2} (\frac{8}{3} \cdot \cos\theta + 4\sin^2\theta) d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi/2} (\frac{8}{3} \cdot \cos\theta + 2(1 - \cos(2\theta))) d\theta = [\frac{8}{3} \cdot \sin\theta + 2\theta - \sin(2\theta)]_{\pi/2}^{\pi/2} = \frac{16}{3} + 2\pi$.