PHYS-C0210 Kvanttimekaniikka, tentti 7.12.2022

Jos teet **kurssitentin**, jolloin arvosana määräytyy tentin, laskuharjoitusten sekä luentojen esitehtävien perusteella, voit vapaasti valita tehtävistä. Viisi pisteiltään parasta tehtävää lasketaan arvosanaan.

Jos teet **lopputentin**, kirjoita ensimmäiselle vastauspaperillesi **LOPPUTENTTI**. Lopputentin arvosana määräytyy pelkästään tentin perusteella ja kaikkien tehtävien pisteet lasketaan mukaan arvosanaan. *Oletusarvona tentti arvostellaan kurssitenttinä.*

1. (a) Osoita, että tilavektori $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|+\rangle + i\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|-\rangle$ on normeerattu. (2p)
   (b) Tila $|\phi_1\rangle$ on ortogonaalinen tilan $|\psi_1\rangle$ kanssa. Määritä tilavektori $|\phi_1\rangle$. (2p)
   (c) Operaattori A operoi systeemin tilaan $|\Psi\rangle$. Kirjoita tämän operaation tulos, kun (i) $|\Psi\rangle$ on A:n ominaistila ja (ii) kun $|\Psi\rangle$ ei ole A:n ominaistila. (2p)

2. Spin 1/2-systeemille spin-operaattorit S_x, S_y ja S_z ovat matriisinotaatiossa (z-kannassa):

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Tarkastele operaattoria

$$S^2 = \frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Kommutoiko operaattori S^2 operaattorin S_y kanssa? Perustele. (2p)
   (b) Onko operaattori S^2 hermiittinen? Perustele. (1p)
   (c) Määritä yleiselle spin 1/2-systeemille S^2 operaattorin odotusarvo. Mitä johtopäätöksiä voit vetää spin-vektorin suunnasta saamasi tuloksen perusteella? (3p)

3. Tarkastellaan hiukkasta, massa m, äärettömässä potentiaalikaivossa, jossa $V(x) = 0$, kun $0 \leq x \leq L$ ja muulloin $V = \infty$. Hiukkasen Hamilton operaattoria vastaavat aaltofunktiot ja energian ominaisarvot ovat

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

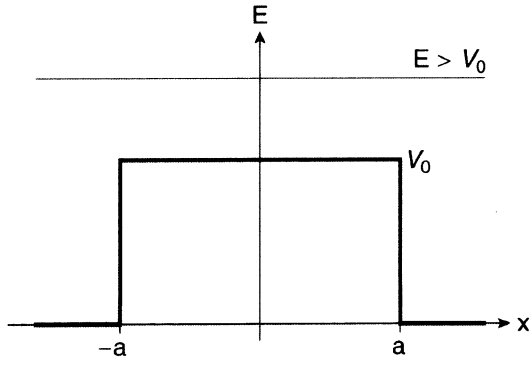
   (a) Hiukkanen on ajanhetkellä $t = 0$ superpositiotilassa

$$\psi(x,0) = C\left[\varphi_1(x) + \frac{i}{3}\varphi_3(x)\right].$$

   Määritä kerroin C ja hiukkasen aaltofunktio ajanhetkellä $t > 0$. (2p)
   (b) Mitkä ovat energian mahdolliset mittausarvot? Millä todennäköisyyksillä nämä mittausarvot esiintyvät? Kuinka suuri on energian odotusarvo ajanhetkellä $t = 0$? (2p)
   (c) Miten laskisit paikan odotusarvon ajanhetkellä t, $\langle x(t)\rangle$, kun hiukkasen aaltofunktio ajanhetkellä $t = 0$ on (a)-kohdan mukainen? (Ei tarvitse laskea loppuun vaan kertoa mistä laskusta tuloksen saisi.) (2p)

KÄÄNNÄ PAPERIA

4. Tarkastele kuvassa olevaa potentiaalimuuria. Kvanttimekaaninen hiukkanen, jonka energia $E > V_0$, liikkuu kuvassa oikealle ja kohtaa muurin.
(a) Kirjoita yhtälöryhmä, jolla lähtisit ratkaisemaan hiukkasen läpäisy- ja heijastumiskertoimia. Mitkä reunaehdot sinun tulee ottaa huomioon? (3p)
(b) Hiukkasen läpäisykerroin tulee olemaan muotoa



$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E-V_0)} \sin^2\left(\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(E-V_0)}\right)}.$$

Millä energian arvoilla läpäisykerroin on suurimmillaan? (1p)
(c) Miksi läpäisykertoimella on maksimeja/resonansseja? (2p)

5. Harmonisen värähtelijän Hamilton operaattori on $H = \hat{p}/2m + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$.
(a) Nosto- ($a^\dagger$) ja lasku-operaattori (a) määritellään seuraavasti:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right), \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)$$

Osoita että Hamilton operaattori on $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$. (2p)
(b) Laske paikan odotusarvo värähtelijän tilalle $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$. (2p)
(c) Millä todennäköisyydellä (b)-kohdan värähtelijä on tilassa $|1\rangle$ ajan t kuluttua? (2p)

Vinkki: $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

6. (a) Systeemin Hamilton operaattori on muotoa $H_0 + H'$, missä H' on pieni häiriö ja H_0 on häiriöttömän systeemin Hamilton operaattori. Miten laskisit häiriöteorian avulla hiukkasen perustilan ψ_1 energian häirityssä tapauksessa ensimmäiseen kertalukuun asti? Anna vastauksesi matriisielementtien avulla ja kiinnitä huomiota siihen että merkintätapasi on ymmärrettävä. (2p)
(b) Hiukkanen on sidottuna harmoniseen värähtelijäpotentiaaliin $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Systeemiin vaikutetaan pienellä häiriöllä $H' = \gamma x^3$. Laske ensimmäisen ja toisen kertaluvun korjaukset hiukkasen perustilan energiaan (4p).
Vinkki: Tässä kannattaa huomata, että häiriö on pariton funktio, ja että häiriöttömän harmonisen värähtelijän energian ominaistilat ovat joko parillisia tai parittomia funktioita, eli niiden neliöt ovat aina parillisia. Tehtävän 5 nosto-ja lasku-operaattorista voi myös olla hyötyä. Yleisessä tapauksessa korjaukset ovat:

$$E_n^{(1)} = \langle n^{(0)}|H'|n^{(0)}\rangle \qquad E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n} \frac{|\langle n^{(0)}|H'|m^{(0)}\rangle|^2}{(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})}$$

Merkitse nimesi, opiskelijanumerosi, koulutusohjelmasi, kurssikoodi ja kokeen päivämäärä jokaiseen suorituspaperiisi.