

Mat-1.422 Matematiikan peruskurssi S2

Tentti 15.11.2004

Täytä selvästi jokaiseen vastauspaperiin kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Laskimen käyttö tentissä on sallittua.

1. a) Osoita että jos sarja $\sum_{j \geq 1} a_j$ suppenee, niin tällöin $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$.
b) Tutki sopivia testejä käyttäen suppenevatko sarjat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 2n}{3n^2 + 4} \right)^{332}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}, \quad \text{ja} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \text{ jossa } a > 0.$$

2. Etsi (esim. Lagrangen kertojamenetelmällä) pintojen $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$ ja $z = x + y$ leikkauskäyrän lähimpänä origoa ja kauimpana origosta olevat pisteet.

3. Laske avaruusintegraali

$$\iiint_V \frac{dV}{1 + x^2 + y^2 + z^2},$$

kun $V = \{(x, y, z) \mid x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$, missä $R > 0$.

4. Olkoon $f(x, y, z)$ skalaarifunktio, jolle pätee

$$\nabla f(x, y, z) = (2z - x)\mathbf{i} - (x + y^2)\mathbf{k}.$$

Laske $\nabla \times (\mathbf{r}f)$, missä $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

5. Laske integraali $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$, missä C on paraabelin $y = x^2$ kaari, joka yhdistää pisteen $(-1, 1)$ pisteeseen $(1, 1)$, ja

$$\mathbf{f}(x, y) = (e^{-x} + y)\mathbf{i} + (e^{-y} + x)\mathbf{j}.$$

6. Olkoon S pinta, joka on annettu parametrisoituna muodossa

$$S : \mathbf{r} = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + u^2 \mathbf{k}, \quad 0 \leq u \leq 4, \quad -\pi \leq v \leq \pi.$$

Laske vuointegraali

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS, \quad \mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

missä $\hat{\mathbf{N}}$ on pinnan S ylöspäin suunnattu normaali. (Ylöspäin tarkoittaa positiivisen z -akselin suuntaan.)