

*Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Funktioalaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!*

1. Funktio $z = z(x, y)$ määräytyy yhtälöstä $zx + y^2 + \sin(z + y) - 2 = 0$ siten, että $z(1, -1) = 1$. Jos nyt $|x - 1| \leq 0,002$ niin määritä (implisiittistä derivointia käyttäen) approksimatiivinen yläraja lausekeelle $|y - (-1)|$ siten, että silloin $|z(x, y) - 1| \leq 0,004$.
2. Määritä funktion $f(x, y) = 4x^3 - y^3 + 3x^2y + 9y$ kriittiset pisteet ja niiden laatu.
3. Laske pintaintegraali $\iint_A 24xy \, dS$ missä A on pinta $z = x + y^2$, $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$.
4. Ratkaise likimääräisesti differentiaaliyhtälö $y'(x) = y(x) + xy(x)^2$, $y(0) = 1$ Eulerin parannetulla menetelmällä laskemalla yksi askel askelpituudella $h = 0.1$. Jos samalla menetelmällä lasketaan kaksi askelta askelpituudella 0.05 niin saadaan tulokseksi $y(0.1) \approx 1.111099$. Arvioi tämän ja tuloksesi perusteella onko 0.05 riittävän lyhyt askelpituus jos halutaan, että virhe tässä laskussa olisi itseisarvoltaan korkeintaan 10^{-4} .
- 5.

(a) Suppeneeko sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$? Perustele.

(b) Määritä jokin luku N siten, että jos sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ summaa approksimoidaan äärellisellä summalla $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n2^n}$ niin virhe on korkeintaan 10^{-4} .