Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Metsalo

Mat-1.451 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1

Mellanförhör nr 3 14.12.2004

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

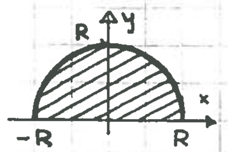
Vid detta mellanförhör får vanliga funktionsräknare användas.
Tabellsamlingar och mer avancerade räknare får inte användas.
Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga!

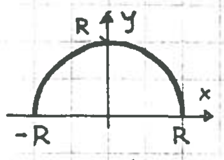
1. Avgör huruvida gränsvärdet existerar och beräkna det, om så är fallet:

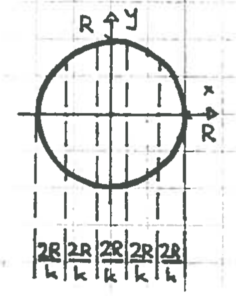
$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{\sin x}}{\arctan x}, \quad \text{b) } \lim_{y\to 1} \left(\frac{y}{y-1} - \frac{1}{\ln y} \right), \quad \text{c) } \lim_{u\to 0} \frac{1}{u^3} \int_0^u \sin(t^2)dt.$$

2. Då den skuggade halvcirkeln i den övre figuren till höger roterar kring x-axeln, uppstår ett klot med radien R. Dess volym är som bekant $V = \frac{4\pi}{3}R^3$. Bekräfta detta genom att beräkna klotets volym med hjälp av
a) tvärsnittsmetoden (skivformeln),
b) metoden med cylindriska skal.

3. a) Då halvcirkelbågen i den mittersta figuren till höger roterar kring x-axeln, uppstår en sfär med radien R (begränsningsytan till klotet i föregående uppgift). Dess area är som bekant $A = 4\pi R^2$. Bekräfta detta genom att beräkna sfärens area med hjälp av en lämplig integral.
b) Visa att om sfären skäres i k stycken lika tjocka skivor, kommer varje skiva att ha samma area, nämligen $4\pi R^2/k$.







4. En 1:a ordningens ordinär differential-ekvation (ODE), som kan skrivas på formen $v'(x) = \frac{dv}{dx} = f(x)g(v)$ (där f och g är två givna funktioner och $v(x)$ är den sökta funktionen), kallas för en *separabel* 1:a ordningens ODE.
En 1:a ordningens ODE, som kan skrivas på formen $y'(x) = \frac{dy}{dx} = h(\frac{y}{x})$ (där h är en given funktion och $y(x)$ är den sökta funktionen), kallas för en *homogen* 1:a ordningens ODE. (Varning: Begreppet *homogen* används inom matematiken för att beteckna många andra egenskaper också.)
a) Visa att en homogen 1:a ordningens ODE $y'(x) = h(\frac{y}{x})$ kan omvandlas till en separabel 1:a ordningens ODE genom att införa en ny (sökt) funktion $v(x)$ via $v(x) = \frac{y(x)}{x}$, så $y(x) = xv(x)$. Hurudan blir den separabla 1:a ordningens ODE, som den nya funktionen $v(x)$ måste satisfiera?
b) Bestäm lösningen $y(x)$ till den homogena 1:a ordningens ODE $y'(x) = \frac{y}{x} + e^{y/x}$, som satisfierar begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ genom att använda metoden beskriven i a)-delen. (Lösningen $y(x)$ visar sig ha en singularitet i $x = e^{-e}$, men duger som lösning för $x > e^{-e}$.)
Gott råd: Det är enkelt att kontrollera, att svarsfunktionen satisfierar såväl differential-ekvationen som begynnelsevillkoret.

Glöm inte att lämna in kursutvärderingarna till studiechefen. God Jul och Gott Nytt År!