Institutionen för matematik
Aalto-universitet. Högskolan för teknikvetenskaper
Pitkäranta

Mat-1.1020 Grundkurs L2

Tentamen 26.02.2014

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Räknare är inte tillåten. Examenstid 4h.

1. Om talen
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{5/4}}$$
vet man, att $s_n = 4.1951068\ldots$ då $n = 9999$. Beräkna gränsvärdet $s = \lim_n s_n$ med fem gällande siffrors noggrannhet utgående från den informationen.

2. (Haren och den gamle berguven) Vid tiden $t = 0$ börjar haren springa från origo längs positiva y-axeln med farten v (konstant). Berguven i punkten $(4, 0)$ observerar haren i samma ögonblick och börjar flyga lågt så att dess flygriktning hela tiden är mot haren. Berguvens fart är också v. Bestäm berguvens flygbana samt gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} s(t)$, där $s(t)$ är avståndet mellan berguven och haren vid tiden t.

3. Ekvationssystemet
$$\begin{cases} xyz + y^2z + z^3 = 2.98 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3.06 \\ x^2 - y^3z + z^4 = 0.92 \end{cases}$$
har en lösning nära punkten $(1, 1, 1)$. Bestäm en approximation av lösningen genom att använda Newtons metod och Gauss' algoritm. En iteration!

4. Lös med hjälp av metoden med Lagrange-multiplikatorer optimeringsproblemet $xy^2z^3 = max!$ under bivillkoret $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

5. Beräkna den plana integralen
$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{[1 + (x - y)^2 + (x + 2y)^2]^2}\, dxdy.$$

Matematiikan laitos
Aalto-yliopisto. Perustieteiden korkeakoulu

Pitkäranta

Mat-1.1020 Peruskurssi L2

Tentti 26.02.2014

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 4h.

1. Luvuista
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{5/4}}$$
tiedetään, että $s_n = 4.1951068\ldots$ kun $n = 9999$. Lähtien tästä tiedosta laske raja-arvo $s = \lim_n s_n$ viiden merkitsevän numeron tarkkuudella.

2. (Jänis ja vanha huuhkaja) Hetkellä $t = 0$ jänis lähtee origosta juoksemaan pitkin positiivista y-akselia vauhdilla v (vakio). Pisteessä $(4, 0)$ oleva huuhkaja huomaa samalla hetkellä jäniksen ja lähtee lentämään matalalla siten, että lentosuunta on koko ajan jänistä kohti. Huuhkajan lentovauhti on myös v. Määritä huuhkajan lentorata sekä raja-arvo $\lim_{t\to\infty} s(t)$, missä $s(t)$ on huuhkajan ja jäniksen välimatka hetkellä t.

3. Yhtälöryhmällä
$$\begin{cases} xyz + y^2z + z^3 = 2.98 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3.06 \\ x^2 - y^3z + z^4 = 0.92 \end{cases}$$
on ratkaisu pisteen $(1, 1, 1)$ lähellä. Määritä ratkaisu likimäärin käyttäen Newtonin menetelmää ja Gaussin algoritmia. Yksi iteraatiokierros!

4. Ratkaise Lagrangen kertojien menetelmällä optimointitehtävä $xy^2z^3 = max!$ ehdolla $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

5. Laske tasointegraali
$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{[1 + (x - y)^2 + (x + 2y)^2]^2}\, dxdy.$$