

Perustele vastauksesi huolella.  
Laskimen käyttö ei ole sallittu.

- (1) Olkoon  $f$  analyyttinen funktio. Osoita, että pätee

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) |f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2.$$

- (2) Etsi konformikuvaus  $f$ , joka kuvaa alueen  $B(2, 2) \setminus \bar{B}(1, 1)$  kompleksitason avoimeksi yksikkökiekoksi.

- (3) Määää integraali

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx,$$

kun vakio  $a > 0$ .

- (4) Mikä on Gram-Schmidt-menetelmä ja mihin sen todistus perustuu?
- (5) Oletetaan, että  $A$  on reaalinen  $m \times n$ -matriisi. Näytä, että  $N(A) = C(A^T)^\perp$ , missä  $N(A)$  on matriisin nolla-avaruus ja  $C(A^T)$  sen transpoosin sarakeavaruus.
- (6) (a) Selitä lyhyesti, mikä on yleisen  $m \times n$ -matriisin singulaariarvohajotelma.  
(b) Muodosta matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

singulaariarvohajotelma.