

Mat-1.1120 Matematiikan peruskurssi C2

Ei laskimia! Jokainen tehtävä on kuuden pisteen arvoinen. Ellei erikseen mainita, moniosaiten tehtävien osien arvot ovat yhtäsuuret. **PERUSTELE VASTAUKSESI!**

Tentti, 26.02.2014

1. Olkoon

$$f(x, y) = \frac{2x}{1 + y^2}.$$

(a) [1 piste] Laske funktion f osittaisderivaatat

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

(b) [1 piste] Laske funktion f suunnattu derivaatta vektorin $u = i + j$ suuntaan pisteessä $(x, y) = (1, 1)$.

(c) [2 pistettä] Määrä tasa-arvokäyrän $f(x, y) = 1$ normaalivektori pisteessä $(x, y) = (1, 1)$.

(d) [2 pistettä] Laske funktion f osittaisderivaattoja käyttäen pinnan $z = f(x, y)$ normaalivektori pisteessä $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

2. Määrä suorakaiteen pinta-alalle A pienin mahdollinen arvo siten, että suorakaiteen sisään voidaan sijoittaa mitkä tahansa kaksi neliötä S_1 ja S_2 , joiden kokonaispinta-ala on 1. Neliöitä ei saa laittaa päällekkäin.

3. Hahmottele pinnat

$$z = 5 - x + y, \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \text{ja} \quad z = 0,$$

ja laske niiden rajoittaman kolmiulotteisen kappaleen tilavuus käyttämällä polaarikoordinaatteja (ts. napakoordinaatteja).

4. Ratkaise yhtälö

$$y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2},$$

kun $x \neq 0$.

5. Tarkastellaan kompleksilukujen $\{-1, 1, -i, i\}$ muodostamaa joukkoa varustettuna tavallisella kompleksilukujen kertolaskulla.

(a) Muodosta Cayleyn taulukko tälle joukolle ja selvitä onko kyseessä ryhmä.

(b) Mitkä ovat joukon alkioiden kertaluvut?

(c) Onko kyseessä syklinen ryhmä?

6. Kuinka monella eri tavalla säännöllisen dodekaedrin sivut voidaan värittää käyttäen kolmea eri väriä?