

## Mat-1.1131 Matematiikan peruskurssi C3-I (5op)

Tentti 17.2.2014

Täytä selvästi jokaiseen vastauspaperiin kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa saa käyttää laskinta. Koeaika on neljä tuntia.

1. a) Laske luvun 8 kompleksiset kuutiojuuret. Piirrä kuva. (3p)  
b) Olkoon  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = z^3$ . Millaiseksi  $f$  kuvaa sektorin

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \frac{1}{2} \text{ ja } \frac{\pi}{6} \leq \text{Arg } z \leq \frac{\pi}{2} \right\}?$$

Piirrä kuva. (3p)

2. Olkoon  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = e^z$ .
- a) Merkitään  $f = u + iv$ . Määritä funktiot  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . (2p)  
b) Millaiseksi  $f$  kuvaa joukon  $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Im}(z) < 2\pi\}$ ? Piirrä kuva ja selitä. (4p)
3. Esitä funktio  $f(z) = e^z/(1-z)$  potenssisarjana kiekossa  $|z| < 1$ . (6p)
4. Funktiolle  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = (\sin z)^2$  saadaan origon ympäristössä potenssisarjaesitys

$$f(z) = \sum_{k=0}^5 a_k z^k + \mathcal{O}(z^6).$$

Määritä kertoimet  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  ja  $a_5$ . (6p)

5. Kehitä funktio  $1/z$  Laurent-sarjaksi annuluksessa  $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-i| < \infty\}$ . (6p) Vihje: sovelta kaavaa

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{i(z-i)}}.$$

Kaavoja löytyy paperin kääntöpuolelta.

Sarjakehitelmiä:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad (|z| < 1).$$

Lisäksi:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$