A! Aalto-yliopisto

Mat-1.1220 Matematiikan peruskurssi S2

Tentti, ke 26.2. klo 15-19

Kokeessa saa käyttää laskimia, ei muita apuvälineitä.

Tehtävä 1: a) Mitä tarkoitetaan, kun sanotaan että

i) jono $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee?

ii) sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee?

b) Osoita osamurtokehitelmän avulla, että teleskooppisarja

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

suppenee. Mikä on sen arvo?

Tehtävä 2: Käyttämällä Lagrangen menetelmää etsi funktion $f(x, y) = xy^2$ maksimiarvo origokeskeisellä 1-säteisellä ympyrällä.

Tehtävä 3: Tarkastellaan funktiota $f(x, y) = x + y^3 - 2$.

a) Mihin suuntaan f kasvaa nopeimmin pisteessä $P = (1, -1)$?

b) Mihin suuntaan f vähenee nopeimmin pisteessä $P = (1, -1)$?

c) Mitä tarkoitetaan funktion suunnatulla derivaatalla?

d) Määrää suunnattu derivaatta $D_{\mathbf{u}} f(1, -1)$, kun $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \sqrt{3}\mathbf{j}$.

Tehtävä 4: Hahmottele pinnat $z = 5 - x + y$, $x^2 + y^2 = 1$ ja $z = 0$ ja laske näiden rajoittaman kolmiulotteisen kappaleen tilavuus napakoordinaattien avulla.

Tehtävä 5: Olkoon $\mathbf{F}$ vektorikenttä

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}.$$

a) Onko $\mathbf{F}$ pyörteetön tai lähteetön?

b) Osoita, että $\mathbf{F}$ on konservatiivinen ja etsi sille skalaaripotentiaali.

c) Laske $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, kun C on sileä käyrä pisteestä $(0, 0, 0)$ pisteeseen $(1, 1, 1)$.

Tehtävä 6: Olkoon

$$\mathbf{F}(x, y) = y^2\mathbf{i} - x^2\mathbf{j}$$

ja C kolmion, jonka kärkipisteet ovat $(0, 0)$, $(1, 0)$ ja $(0, 1)$, myötäpäivään suunnistettu kehä. Laske viivaintegraali $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.