Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos Rasila

Mat-1.1230 peruskurssi S3 2014

Tentti Ma 17.2.2014 klo 13.00-17.00

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskirjoituksessa sallittua laskinta mutta ei taulukkokirjaa.

1 a) Oletetaan, että $z = -2 + 2\mathrm{i}$. Laske $\mathrm{Arg}z$, $z\bar{z}$, ja $z/\bar{z}$.

b) Etsi Möbius-kuvaus, joka vie pisteet $-\mathrm{i}, 1, \mathrm{i}$ pisteiksi $-1, 0, \infty$.

2 Etsi funktion

$$u(x,y) = -3x(y+1)^2 + x^3$$

harmoninen konjugaattifunktio eli sellainen funktio v, että

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$$

on analyyttinen.

3 Ratkaise Z-muunnosta käyttäen differenssiyhtälö

$$y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) = 1, \qquad y(0) = 0,\ y(1) = 3/2.$$

Vihje: Käänteismuunnoksen laskemisessa kannattaa käyttää residylaskentaa.

4 Olkoon

$$f(t) = t, \quad t \in [-\pi, \pi).$$

Laske funktion $f(t)$ Fourier-sarja (f:n jakso on 2π).

5 Laske matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

LU-hajotelma.

6 Esitä differentiaaliyhtälöt ryhmänä 1. asteen differentiaaliyhtälöitä:

a)

$$y'' - 4'y + 5y = 0,$$

b)

$$y''' - 5y'' + 9y = t\cos(2t).$$

Vihje:

Kääntöpuolella olevat kaavat voivat virkistää muistia.

Cauchy-Riemannin yhtälöt:

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}v(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}v(x,y).$$

Möbius-kuvaukset:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}.$$

Polkuintegraali:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt.$$

Cauchyn integraalilause:

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

Cauchyn integraalikaava:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0).$$

Laurentin sarja:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}.$$

Residylause:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z).$$

Z-muunnokseen liittyviä kaavoja: Jos $A(z) = Z(a_n)$, niin

$$Z(na_n) = -zA'(z),\ Z(c^n a_n) = A(z/c),$$

$$Z(a_{n+1}) = z(A(z)-a_0),\ Z(a_{n+2}) = z^2(A(z)-a_0-a_1/z).$$

Z-muunnoksia:

(a_n)	$A(z) = Z(a_n)$
(1)	$z/(z-1)$
(n)	$z/(z-1)^2$
(n^2)	$z(z+1)/(z-1)^3$
(α^n)	$z/(z-\alpha)$
$(n\alpha^n)$	$\alpha z/(z-\alpha)^2$
$(\cos(n\pi/2))$	$z^2/(z^2+1)$
$(\sin(n\pi/2))$	$z/(z^2+1)$
$(\sin(n\alpha))$	$z\sin\alpha/(z^2-2z\cos\alpha+1)$
$(\cos(n\alpha))$	$z(z-\cos\alpha)/(z^2-2z\cos\alpha+1)$

Epähomogeeninen systeemi:

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{u} + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{b}(s)\,ds.$$

Matriisinormi:

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{z}\|=1} \|\mathbf{Az}\|.$$

Häiriöalttius:

$$\operatorname{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|.$$

Normaaliyhtälöt:

$$\mathbf{A}^*\mathbf{Az} = \mathbf{A}^*\mathbf{c}, \qquad \mathbf{Rz} = \mathbf{Q}^*\mathbf{c}.$$

Gram-Schmidt:

$$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 \tag{1}$$

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \tag{2}$$

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{a}_{k+1} - \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{q}_1\rangle\mathbf{q}_1 - \ldots - \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{q}_k\rangle\mathbf{q}_k \tag{3}$$

$$\mathbf{q}_{k+1} = \frac{\mathbf{v}_{k+1}}{\|\mathbf{v}_{k+1}\|} \tag{4}$$

$$\rightarrow \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n\}.$$