Mat-1.1320 Matematiikan peruskurssi K2

Heikkinen/Lindfors

Kokeessa saa käyttää laskinta.

3. välikoe 13.05.2013

1. Ratkaise alkuarvotehtävä

   a) $y' + 2xy = e^{-x^2} \sin x, \quad y(0) = 2.$

   b) $y' = e^{x-y}, \quad y(0) = 1.$

2. Etsi differentiaaliyhtälön

$$y'' - 5y' + 4y = \cos 2x$$

   ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y(0) = 1, y'(0) = 0$.
   Vihje: yksittäisratkaisu löytyy yritteellä $y = a\cos 2x + b \sin 2x$.

3. Olkoon $\mathcal{S}$ pinta, jolla on parametrisointi $\mathbf{r}(u,v) = (\sqrt{2}\,uv,\ u^2,\ v^2)$, $0 \le u, v \le 1$. Laske $\mathcal{S}$:n pinta-ala.

4. a) Laske kentän $\mathbf{F} = \frac{x^2 \sin y}{z}\,\mathbf{i} + \frac{x \cos y}{z}\,\mathbf{j} + x \sin y \ln z\,\mathbf{k}$ vuo läpi laatikon $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \pi/2$, $1 \le z \le e$ pinnan ulospäin.

   b) Olkoon $\mathcal{C}$ käyrä, jolla on parametrisointi

$$\mathbf{r}(t) = \Big(3(\cos t + \sin t),\ 2(\sin t - \cos t)\Big),\ \ 0 \le t \le 2\pi.$$

   Laske $\mathcal{C}$:n rajoittaman alueen pinta-ala soveltamalla Greenin lausetta vektorikenttään $\mathbf{F} = \frac{1}{2}(-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})$.

Kaavoja:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$$

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dA = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$