

## Mat-1.1331 Matematiikan peruskurssi KP3-I

Heikkinen/Perkkiö

Tentti 17.2.2014

Tentissä saa käyttää laskinta. Sivun kääntöpuolelta löytyy tarpeellisia kaavoja.

1. Laske

a)  $\frac{2-3i}{3+i}$

b)  $(1+i)^6$

c)  $\text{Ln}(-e^2)$ .

Esitä vastauksesi muodossa  $x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ .

2. Osoita, että funktio

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2$$

on harmoninen ja määrää sen harmoninen konjugaatti.

3. a) Määrää  $f^{(6)}(0)$ , kun

$$f(z) = \frac{1}{1-iz^2}.$$

b) Määrää potenssisarjan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(in)^2}{5^n} z^n$$

suppenemissäde.

4. Olkoon  $f$   $2\pi$ -jaksollinen funktio, jolle

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } -\pi < x \leq 0 \\ 1, & \text{kun } 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

Määrää  $f$ :n Fourier-sarja.

5. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$f'' + 9f = 0, \quad f(0) = 2, \quad f'(0) = -4$$

Laplace-muunnoksen avulla.

## Kaavoja

- Cauchy–Riemann-yhtälöt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

- Analyttisen funktion  $f$  Taylorin sarja keskuksena  $z_0$  on

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

- Geometrinen sarja:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

kun  $|z| < 1$ .

- Eksponenttifunktion sarjaesitys:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

- $2\pi$ -jaksollisen funktion  $f$  Fourier-sarja on

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

missä

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

ja

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

- Funktion  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  Laplace-muunnos on

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

- Laplace-muunnoksia

Funktio	Muunnos
$t^n, n \geq 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$

- Laplace-muunnoksen ominaisuuksia

Merkitään  $F = \mathcal{L}\{f\}$ ,  $G = \mathcal{L}\{g\}$  ja  $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ .

Funktio	Muunnos
$af + bg$	$aF + bG$
$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
$f(t - t_0)u(t - t_0)$	$e^{-st_0} \bar{F}(s)$
$e^{-at} f(t)$	$F(s + a)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} f^{(j)}(0)$