A! Aalto-universitetet

Gripenberg, Blomqvist, Norén

Mat-1.1520 Grundkurs i matematik 2
Mellanförhör 3, 13.5.2013

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
Räknare eller tabeller får **inte** *användas i detta prov!*

1. (5p) Låt Y vara ytan $\{ (x,y,z) : 2x + 3y + 4z = 5,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le y \}$ och $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$. Skriv ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ som en dubbelintegral (tänk på hur det är enklast att välja parametrar) men räkna inte ut integralen. Välj normalen så att $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} > 0$.

2. (4p) Antag att Y är ytan $Y = \{ (x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x \ge 0 \}$. Bestäm ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, där $\mathbf{F} = (2+x)\mathbf{i} + (3 + x^2 + y)\mathbf{j} + (\sin(y) + z)\mathbf{k}$ och normalen $\mathbf{n}$ valts så att $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} > 0$, genom att använda divergensteoremet. Observera när du gör detta att Y inte är randen av någon kropp, men $Y \cup Y_1$ där $Y_1 = \{ (x,y,z) : x = 0,\ y^2 + z^2 \le 4 \}$ är det. Kom också ihåg att volymen av en boll med radien r är $\frac{4\pi r^3}{3}$.

3. (5p) Bestäm lösningen till differentialekvationssystemet

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 12 & -8 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

genom att utnyttja det faktum att matrisen $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 12 & -8 \end{bmatrix}$ har egenvektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

4. (5p) Kontrollera att $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en jämviktspunkt för differentialekvationssystemet

$$\begin{aligned} x'(t) &= e^{-x(t)} y(t) + x(t) - 2y(t) + 1, \\ y'(t) &= 3x(t)y(t) - y(t)^2 + \cos(x(t)). \end{aligned}$$

Är denhär jämviktspunkten asymptotiskt stabil? (Motivera ditt svar!)

5. (5p) Om man använder den implicita mittpunktsmetoden för att lösa differentialekvationssystemet $Y'(t) = F(t, Y(t))$ så räknar man i varje steg ut $K_1 = hF(t_n + \frac{1}{2}h, Y_n + \frac{1}{2}K_1)$ och sedan $Y_{n+1} = Y_n + K_1$, $t_{n+1} = t_n + h$. Visa att om man tillämpar denna metod på den linjära ekvationen $Y'(t) = AY(t)$ så kan metoden också skrivas i formen

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}(AY_n + AY_{n+1}).$$

Här antas matrisen A vara sådan att $A + \mu I$ är inverterbar då $\mu \in (-\infty, 0)$.