Institutionen för matematik och systemanalys
Aalto-universitetet, högskolan för teknikvetenskaper Metsalo

Mat-1.1532 Svenskspråkig grundkurs i matematik 3-II

Tentamen ~~12.8.~~ ~~27~~ 2013-12-18

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Vid denna tentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas. Fråga, om ni misstänker att det förekommer något tryckfel! Observera, att olika (del-)uppgifter kan ge olika antal poäng.

1. a) Gör en LU-uppdelning av 2×3-matrisen $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
(Du behöver inte använda pivotering.) (2p.)
b) Låt A vara en reell $m \times n$-matris sådan att $A\vec{x} = \vec{0} \in \mathbf{R}^m$ för varje $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$.
Visa att A måste vara nollmatrisen. (1p.)

2. Bestäm lösningen till differentialekvationssystemet $Y'(t) = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} Y(t); Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ genom att skriva lösningen på formen $Y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} X_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} X_2$, där λ_j är egenvärden och X_j är egenvektorer. (4p.) (Gott råd: Kontrollera efteråt via insättning.)

3. Förklara varför (bevis behövs inte) lösningen $Y(t)$ till differentialekvationssystemet $Y'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ har ett gränsvärde $Y_\infty = \lim_{t\to\infty} Y(t)$ samt bestäm detta gränsvärde. (6p.)

4. Vi studerar det autonoma, icke-linjära differentialekvationssystemet
$y_1'(t) = -y_1(t) + 2y_2(t) + y_1(t) \cdot y_2(t)$, $y_2'(t) = y_1(t) + y_2(t)$.
a) Origo (dvs. $y_1(t) \equiv 0 \equiv y_2(t)$) är en jämviktspunkt för systemet.
Är origo en asymptotiskt stabil jämviktspunkt eller inte? Motivera. (2p.)
b) Systemet har också en annan jämviktspunkt. Bestäm den. (2p.)
c) Är denna andra jämviktspunkt asymptotiskt stabil eller inte? Motivera. (2p.)

5. Vid *differensapproximationer* kan man approximera $f'(x_0)$ med $(f(x_0+h) - f(x_0-h))/2h$ och $f''(x_0)$ med $(f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h))/h^2$. Vi försöker nu lösa randvärdesproblemet $f''(x) + x \cdot f'(x) + 2f(x) = 1 + x; f(0) = 2, f(2) = 3$ för $0 \le x \le 2$ genom att dela upp intervallet $[0, 2]$ i 4 delintervall med längden $\Delta x = h = 1/2$. Låt f_1 vara en approximation av $f(1 \cdot h) = f(1/2)$, f_2 en approximation av $f(2 \cdot h) = f(1)$ och f_3 en approximation av $f(3 \cdot h) = f(3/2)$. Sätt upp det linjära ekvationssystemet för f_1, f_2 och f_3, som differensapproximationerna ovan av randvärdesproblemet ger upphov till på formen $A\vec{f} = \vec{b}$, där $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$. (Det linjära ekvationssystemet behöver *inte* lösas!) (5p.)

6. En avbildning $T : V \to W$ från ett reellt vektorrum V till ett (möjligtvis annat) reellt vektorrum W är *linjär*, om $T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2), \forall v_1, v_2 \in V$ och $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.
Låt P beteckna vektorrummet bestående av alla reellvärda polynom av en reell variabel.
Vi studerar avbildningarna $A, B : P \to P, (A(p))(x) = x \cdot p'(x), (B(p))(x) = x^2 \cdot p''(x)$.
a) Är A en linjär avbildning? Är B en linjär avbildning? Motivera. (1p.+1p.)
b) Har vi att $(A(B(p)))(x) = (B(A(p)))(x)$ för alla polynom $p \in P$?
(Är alltså $A \circ B = B \circ A$?) Motivera. (4p.)